

**KENNZEICHNUNG UND BEHANDLUNG
VON MARKOFFPROZESSEN ALS OPERATOREN**

von
Ulrich Krause
aus Berlin

1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

KENNZEICHNUNG UND BEHANDLUNG VON

=====

MARKOFFPROZESSEN ALS OPERATOREN

=====

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen - Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Ulrich Krause
aus Berlin

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 22.2.1967

Dekan: Universitätsprofessor Dr. K. Brodersen

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. H. Bauer

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. K. Jacobs

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
§1 Markoffeigenschaft und Halbgruppeneigenschaft	3
§2 Markoffoperatoren	13
§3 Stoppzeiten und starke Markoffoperatoren	27
§4 Transformationen von Markoffoperatoren Insbesondere Transformation des Zustandsraumes	38
§5 Arretierte Operatoren	47
Literatur	64

Einleitung

Markoffprozesse sind unhandliche Objekte, was besonders spürt, wer Transformationen und Recollements von ihnen betrachtet. Die in der Definition eines Markoffprozesses auftretenden G - Algebren spielen bei diesen Untersuchungen eine schwer zu durchschauende Rolle. Die Definition ist zwar anschaulich, führt aber später zu mehr und mehr unanschaulichen Operationen bei denen sie auch analytisch schlecht zu handhaben ist.

In dieser Arbeit wird eine Kennzeichnung schwacher und starker Markoffprozesse durch Operatoren auf Banachräumen meßbarer Funktionen gegeben. Transformation und Recollement erscheinen als übersichtliche Operationen unter Operatoren.

Bekanntlich kennzeichnet die Halbgruppeneigenschaft der Übergangsoperatoren nicht die (schwachen) Markoffprozesse unter den stochastischen Prozessen [5]. In §1 wird sogar gezeigt, daß es zu fast allen Halbgruppen von Übergangsoperatoren nicht - Markoffsche Prozesse mit diesen Übergangsoperatoren gibt.

In §2 werden zu einem Prozess Operatoren konstruiert, derart, daß ein Prozess genau dann ein schwacher Markoffprozess ist, wenn diese Operatoren eine Halbgruppe bilden.

In §3 wird eine Familie von Operatoren konstruiert, die diejenigen von §2 umfaßt, und so, daß ein Prozess genau dann ein starker Markoffprozess ist, wenn diese Operatoren eine Halbgruppe bilden. Der analytische Unterschied ist der, daß die Halbgruppe eines schwachen Markoffprozesses kommutativ ist, die Halbgruppe eines starken Markoffprozesses jedoch nicht.

Diese Kennzeichnung erlaubt es, Transformationen von Prozessen einfach und fast einheitlich zu studieren (§4). Ein Resultat von Dynkin [4] über Zustandsraumtransformationen wird verallgemeinert und verschärft.

In §5 wird im Hinblick auf [3] das Arretieren von Prozessen untersucht. Es ergibt sich eine Verschärfung eines Satzes von Dynkin [4] und ein einfacher Beweis eines Satzes von Blumenthal und Gettoor [2] . Die G - Algebren sind unnötig geworden, und dieser Satz zeigt, wie sie aus den Operatoren

zurückgewonnen werden können. Für einen Spezialfall wird ein stark Markoffsches Recollement zweier stark Markoffscher Prozesse explizit angegeben. Dieser Fall zeigt auch, daß die Beschreibung von Markoffprozessen durch Operatoren eine gewisse Anschaulichkeit besitzt, denn das Recollement von zwei Markoffprozessen erscheint, wie man es anschaulich erwarten sollte, als Supremum der zugehörigen Operatoren in einer anschaulich naheliegenden Ordnung.

Eine Möglichkeit, die Gedanken dieser Arbeit fortzusetzen sei zum Schluß kurz angedeutet. Die hier gegebene Kennzeichnung von Markoffprozessen durch Operatoren legt es nahe, Markoffprozesse im Rahmen einer abstrakten axiomatischen Theorie der Markoffoperatoren zu studieren. In einer solchen Axiomatik würde man sich eine Algebra von Funktionen (analog zur Algebra $\mathcal{M}$ - siehe §2) und darauf operierende Operatoren (analog zu P, L_T, L^T - siehe §§ 2,3,5) vorgeben, die einigen einfachen Beziehungen gehorchen. Meßbarkeitsfragen spielen dann keine Rolle mehr; die Forderung, daß die Operatoren die Algebra in sich abbilden, ersetzt Meßbarkeitsforderungen.

Man könnte noch einen Schritt weitergehen , und statt einer Algebra von Funktionen eine abstrakte Algebra voraussetzen. Mittels der Operatoren lassen sich dann exzessive und harmonische Vektoren in der Algebra definieren. Die daran anschließende abstrakte Potentialtheorie müßte bereits viele wesentlichen Züge der Potentialtheorie von Markoffprozessen wiedergeben.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. H. Bauer möchte ich an dieser Stelle herzlich dafür danken, daß er mir die Theorie der Markoffprozesse nahegebracht und meine Arbeit auf diesem Gebiet durch viele Hinweise gefördert hat.

§ 1 Markoffeigenschaft und Halbgruppeneigenschaft

Sei E ein lokal - kompakter (d.h. auch hausdorffscher) topologischer Raum, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt (also ein LKAB).

Δ bezeichne den Alexandroffpunkt zu E , falls E nicht kompakt ist, und einen nicht in E gelegenen Punkt, falls E kompakt ist; es ist dann $E_\Delta = E \cup \Delta$ ein kompakter Raum.

$\mathcal{L}$ bezeichne die σ - Algebra der Borelmengen in E ,

$\mathcal{L}_\Delta$ diejenige in E_Δ .

Definition (siehe [3]) Ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum E und Friedhof Δ ist ein Tupel

$$X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_\Delta), \text{ wobei:}$$

- (1) Ω ist eine Menge und $(X_t)_{t \in [0, \infty]}$ eine Familie von Abbildungen $X_t: \Omega \longrightarrow E$ mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $a_\omega \in [0, \infty]$ gibt, so daß

$$\{t: X_t(\omega) = \Delta\} = [a_\omega, +\infty] .$$

- (2) Ist $F(X) = \mathcal{U}(X_t, t \in [0, \infty])$ die von den X_t erzeugte σ - Algebra (bzgl. $\mathcal{L}_\Delta$ auf E_Δ), so ist $(\Omega, F(X), P^x)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum für jedes $x \in E_\Delta$, und die Abbildung $x \longrightarrow P^x(A)$ von E_Δ in $[0, 1]$ ist $\mathcal{L}_\Delta$ - meßbar für jedes $A \in F(X)$.

- (3) Es gibt ein $\omega_\Delta \in \Omega$ mit $X_0(\omega_\Delta) = \Delta$ und $P^\Delta = \mathcal{E}_{\omega_\Delta}$.

Ein Punkt $x \in E_\Delta$ heißt normal, wenn $P^x[X_0 = x] = 1$ ist. Der Prozeß X heißt normal, wenn alle Punkte von E normal sind.

X heißt homogen, wenn es zu jedem $t \in [0, \infty]$ eine Abbildung

$$\theta_t: \Omega \longrightarrow \Omega \quad \text{gibt mit}$$

$$X_{s+t} = X_s \circ \theta_t \quad \text{für alle } s \in [0, \infty]$$

und wo $\theta_\infty(\omega) = \omega_\Delta$ für alle $\omega \in \Omega$.

Die Abbildung $\omega \longrightarrow \zeta(\omega) = \inf \{ t \in [0, \infty] : X_t(\omega) = \Delta \}$
heißt Lebenszeit des Prozesses X .

Zwei Prozesse $X = (\Omega, (X_t), (P^X), E_\Delta)$, $Y = (\bar{\Omega}, (\bar{X}_t), (\bar{P}^X), E_\Delta)$
heißten äquivalent, in Zeichen $X \approx Y$, wenn sie diesselben
endlich - dimensionalen Verteilungen besitzen, d.h. wenn gilt

$$P^X [X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] = \bar{P}^X [\bar{X}_{t_1} \in A_1, \dots, \bar{X}_{t_n} \in A_n]$$

für alle $x \in E_\Delta$, alle Tupel $(t_1, \dots, t_n)$, $(A_1, \dots, A_n)$, wo
 $t_1 \in [0, \infty]$, $A_1 \in \mathcal{L}_\Delta$.

Sei $E_\Delta^{[0, \infty]}$ die Menge aller Abbildungen - bezeichnet durch
 $s \longrightarrow w_s$ oder (w_s) - von $[0, \infty]$ in E_Δ , $E_\Delta^{[0, \infty]}$ die
Produkt σ -Algebra auf $E_\Delta^{[0, \infty]}$.

Eine Teilmenge $W \subset E_\Delta^{[0, \infty]}$ heißt typisch (siehe [3]), wenn gilt:

- (1) Zu $w \in W$ gibt es ein $a \in [0, \infty]$ so daß $\{t: w_t = \Delta\} = [a, \infty]$.
Die Abbildung $t \longrightarrow \Delta$, bezeichnet durch (Δ) liegt in W .
- (2) Ist $w \in W$, so sind die Abbildungen $t \longrightarrow w_{s+t}$ und
 $t \longrightarrow w_{s \wedge t}$ in W für jedes $s \in [0, \infty]$. (Dabei $s \wedge t = \inf(s, t)$).
- (3) (Propriété de raccordement)

Zu $w, w' \in W$ und $w'_0 = w_t$ für ein $t \in [0, \infty]$ gibt es ein $w'' \in W$ mit

$$w''_s = \begin{cases} w_s, & s \leq t \\ w'_{s-t}, & s \geq t \end{cases}.$$

Beispiele für typische Teilmengen sind die Menge aller Abbildungen
aus $E_\Delta^{[0, \infty]}$, die (1) genügen, die Menge aller rechtsseitig
stetigen Abbildungen in $E_\Delta^{[0, \infty]}$ die (1) genügen.

Zu einem Prozess X gehört die Abbildung

$$\phi_X: \Omega \longrightarrow E_\Delta^{[0, \infty]} \quad , \quad \phi_X(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in [0, \infty]} \quad .$$

Sei W eine typische Menge; gilt für einen Prozess X $\phi_X(\Omega) \subset W$, so heißt X vom Typ W .

Sei $\pi_t: W \longrightarrow E_\Delta$ die Projektion $\pi_t(w) = w_t$, X vom Typ W , dann ist $\pi_t \phi_X = X_t$ und

$X_W = (W, (\pi_t), (\phi_X P^X), E_\Delta)$ wieder ein stochastischer Prozess, und zwar einer der zu X äquivalent ist.

X_W ist homogen bezüglich der Abbildungen $\theta_t: W \longrightarrow W$, $\theta_t((w_s)) = (w_{s+t})$.

Ist W die Menge aller Abbildungen in $E_\Delta^{[0, \infty]}$ die (1) genügen, so ist für jeden Prozess X $\phi_X(\Omega) \subset W$; der Prozess X_W heißt dann kanonischer Prozess zu X . Soweit nichts anderes gesagt wird, wird hier ϕ_X als Abbildung von Ω in dieses W verstanden.

Ein stochastischer Prozess heißt trivial, wenn das Maß $\phi_X P^X$ für jedes x ein Punktmaß ist. Trivial deshalb, weil es bei diesen Prozessen nur Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten 0 und 1 gibt, diese Prozesse also deterministisch, mithin als stochastische Prozesse trivial sind. Ein Beispiel ist die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit im R^1 .

Die $\mathcal{G}$ -Algebra $F_t(X) = \mathcal{O}(X_s, s \leq t)$ heißt t -Vergangenheit von X ; $F_t = \mathcal{O}(\pi_s, s \leq t)$ ist die kanonische t -Vergangenheit. X heißt (schwacher) Markoffprozess, wenn X die (schwache) Markoffeigenschaft besitzt, d.h. wenn gilt

$$P^X [X_{s+t} \in A \mid F_t(X)] = P^X_t [X_s \in A] \quad P^X - \text{f.s.}$$

für alle $x \in E_\Delta$, s und t aus $[0, \infty]$, $A \in \mathcal{L}_\Delta$.

Ein Prozess X definiert eine Familie (P_t) linearer Operatoren der beschränkten, $\mathcal{L}_\Delta$ -meßbaren Funktionen auf E_Δ in sich vermöge

$$(P_t f)(x) = \int f \circ X_t \, dP^X$$

f beschränkte, reelle, $\mathcal{L}_\Delta$ -meßbare Funktion auf E_Δ , $t \in [0, \infty]$, $x \in E_\Delta$.

P_t hat folgende Eigenschaften:

P_t ist linear; positiv; $P_t 1 = 1$; nach oben σ -stetig, d.h. wenn $f_n \uparrow f$ beschränkt, so $P_t f_n \uparrow P_t f$ und $(P_t f)(\Delta) = f(\Delta)$. (*)
 (P_t) heißt Familie der Übergangsoperatoren oder Kern von K .

Zwei stochastische Prozesse X, Y besitzen genau dann dieselben ein-dimensionalen Verteilungen, in Zeichen $X \sim Y$, wenn sie dieselben Übergangsoperatoren besitzen.

Es gelten folgende einfache Aussagen (siehe etwa [1]):

(a) Für einen Markoffprozess bilden die Übergangsoperatoren eine Halbgruppe, d.h. es gilt $P_{s+t} = P_s \circ P_t$.

(b) Zu jeder Halbgruppe von Operatoren auf den beschränkten $\mathcal{L}_\Delta$ -meßbaren Funktionen auf E_Δ , mit $[0, \infty[$ als Parametermenge und so, daß P_0 die Identität ist und jeder Operator die Eigenschaften (*) besitzt, gibt es einen normalen Markoffprozess, der diese Operatoren als Übergangsoperatoren hat.

(c) Zwei Markoffprozesse sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Übergangsoperatoren besitzen.

Sei X die Menge aller stochastischen Prozesse mit Zustandsraum E ,
 X_1 die Menge aller stochastischen Prozesse, deren Übergangsoperatoren eine Halbgruppe bilden,
 X_0 die Menge aller Markoffprozesse.

Bezeichnet $X_0 / \approx$ die Menge der Äquivalenzklassen in X_0 bezüglich der Äquivalenzrelation " $\approx$ ", sei $X_1 / \sim$ analog definiert, so lassen sich (a), (b), (c) ((b) gilt auch ohne die Voraussetzung, daß P_0 die Identität ist, nur ist der erhaltene Prozess dann nicht mehr normal) zusammenfassend auch so formulieren:

Die Elemente von $X_0 / \approx$ und $X_1 / \sim$ entsprechen sich eineindeutig.

Das ist (bis auf die Äquivalenz " $\approx$ " unter Prozessen) eine Charakterisierung der Markoffprozesse durch die Halbgruppen-eigenschaft der Übergangsoperatoren und die Äquivalenzrelation " $\sim$ ".

Eine Charakterisierung der Markoffprozesse durch die Halbgruppeneigenschaft der Übergangsoperatoren allein ist jedoch nicht möglich. In Satz 1.3 wird gezeigt werden, daß es zu fast allen Halbgruppen einen Prozeß gibt, der die Halbgruppe als Übergangsoperatoren hat, der aber dennoch nicht die Markoffeigenschaft besitzt. Der Beweis des Satzes benutzt folgende Komposition von Prozessen.

Definition Seien $X_i = (\Omega_i, (X_t^i), (P_i^x), E_\Delta)$, $i=1,2$ zwei Prozesse mit den Lebenszeiten ζ_1, ζ_2 .

Sei $S: \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine $F(X_1) \otimes F(X_2)$ - meßbare Funktion mit $S(\omega_1, \omega_2) \leq \zeta_1(\omega_1)$ oder $S(\omega_1, \omega_2) \geq \zeta_2(\omega_2)$ für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Dann ist

$$Y = (\Omega_1 \times \Omega_2, (Y_t), (P_1^x \otimes P_2^x), E_\Delta)$$

mit

$$Y_t(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} X_t^1(\omega_1) & \text{für } t < S(\omega_1, \omega_2) \\ X_t^2(\omega_2) & \text{für } t \geq S(\omega_1, \omega_2) \end{cases}$$

wieder ein stochastischer Prozess.

Y heißt das Produkt von X_1 und X_2 bezüglich S, $Y = X_1 \otimes_S X_2$.

Grob gesprochen stellt Y eine Bewegung dar, die bis zum Zeitpunkt S nach den Gesetzen von X_1 und danach nach denen von X_2 abläuft. Wie man danach erwarten sollte, gilt

$$X_1 \otimes_\infty X_2 \approx X_1 \quad \text{und} \quad X_1 \otimes_0 X_2 \approx X_2.$$

Daß bei gewissen Produktbildungen die Übergangsoperatoren sich nicht ändern, besagt

Lemma 1.1 Sei X ein Prozess mit Lebenszeit ζ ; für $c \in [0, \infty]$ sei $S_c: \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ die Abbildung $S_c(\omega_1, \omega_2) = c \wedge \zeta(\omega_1) \wedge \zeta(\omega_2)$ ("∧" dabei Infimumsbildung).

Dann gilt für alle $c \in [0, \infty]$

$$X \otimes_{S_c} X \sim X$$

Beweis: Sei $c \in [0, \infty]$ und $Y = X \otimes_{S_c} X$ (da $S_c(\omega_1, \omega_2) \leq \zeta(\omega_1)$,

ist die Produktbildung möglich).

Sei $x \in E_A$, $t \in [0, \infty]$, $A \in \mathcal{L}_A$.

Es ist $[t < S_c] = [t < c] \cap [t < \zeta] \times [t < \zeta]$

$$[t \geq S_c] = [t \geq c] \cup [t \geq \zeta] \times \Omega \cup \Omega \times [t \geq \zeta].$$

Daher

$$\begin{aligned} P^X \otimes P^X [Y_t \in A] &= P^X \otimes P^X ([Y_t \in A] \cap [t < S_c]) + P^X \otimes P^X ([Y_t \in A] \cap [t \geq S_c]) \\ &= P^X \otimes P^X ([X_t \in A] \times \Omega \cap [t < c] \cap [t < \zeta] \times [t < \zeta]) \\ &\quad + P^X \otimes P^X (\Omega \times [X_t \in A] \cap [t \geq c] \cup \Omega \times [X_t \in A] \cap [t \geq \zeta] \times \Omega \cup \Omega \times [X_t \in A] \cap \Omega \times [t \geq \zeta]) \\ &= P^X [t < c] \cdot P^X [t < \zeta] \cdot P^X ([X_t \in A] \cap [t < \zeta]) \\ &\quad + P^X \otimes P^X (\Omega \times [X_t \in A] \cap [t \geq c]) + P^X \otimes P^X ([t \geq \zeta] \times [X_t \in A]) \\ &\quad + P^X \otimes P^X (\Omega \times ([X_t \in A] \cap [t \geq \zeta]) - P^X \otimes P^X ([t \geq \zeta] \times ([X_t \in A] \cap [t \geq c]))) \\ &= P^X \otimes P^X ([t \geq \zeta] \times ([X_t \in A] \cap [t \geq \zeta])) - P^X \otimes P^X (\Omega \times ([X_t \in A] \cap [t \geq c] \cap [t \geq \zeta])) \\ &\quad + P^X \otimes P^X ([t \geq \zeta] \times ([X_t \in A] \cap [t \geq c] \cap [t \geq \zeta])) \\ &= P^X [t < c] \cdot P^X [t < \zeta] \cdot P^X ([X_t \in A] \cap [t < \zeta]) \\ &\quad + P^X [X_t \in A] \cdot P^X [t \geq c] + P^X [X_t \in A] \cdot P^X [t \geq \zeta] + P^X ([X_t \in A] \cap [t \geq \zeta]) \\ &\quad - P^X [t \geq \zeta] \cdot P^X [X_t \in A] \cdot P^X [t \geq c] - P^X [t \geq \zeta] \cdot P^X ([X_t \in A] \cap [t \geq \zeta]) \\ &\quad - P^X [t \geq c] \cdot P^X ([X_t \in A] \cap [t \geq \zeta]) + P^X [t \geq \zeta] \cdot P^X [t \geq c] \cdot P^X ([X_t \in A] \cap [t \geq \zeta]) \\ &= P^X [X_t \in A]. \end{aligned}$$

Also $X \otimes_{S_c} X \sim X$.

Im allgemeinen ist jedoch $X \otimes_{S_c} X \not\approx X$.

Das zeigt das folgende Lemma für den Fall, daß die Lebenszeit von X unendlich und $S_c = c$ ist.

Lemma 1.2 Sei X ein Prozess mit der Lebenszeit $\zeta = \infty$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) $X \otimes_c X \approx X$ für alle nicht - negativen reellen Zahlen c
- (2) Die Familie $(X_t)_t$ ist bezüglich jedes P^X unabhängig.

Beweis: Aus (1) folgt (2); sei dazu $x \in E_A$ und t_i ($i = 1, \dots, n$) reelle Zahlen mit $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Nach Voraussetzung ist $Y = X \otimes_{t_n} X \approx X$, also, wenn $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{L}_A$ sind

$$\begin{aligned} P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] &= P^X \otimes P^X[Y_{t_1} \in A_1, \dots, Y_{t_n} \in A_n] \\ &= P^X \otimes P^X([X_{t_1} \in A_1] \times \Omega \cap \dots \cap [X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}] \times \Omega \cap [X_{t_n} \in A_n]) \\ &= P^X \otimes P^X([X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}] \times [X_{t_n} \in A_n]) \\ &= P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}] \cdot P^X[X_{t_n} \in A_n]. \end{aligned}$$

Also sind $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ bezüglich P^X unabhängig; daher gilt (2).

Für den Beweis, daß aus (2) (1) folgt, sei c eine nicht -negative reelle Zahl, $Y = X \otimes_c X$, t_i ($i = 1, \dots, n$) reelle Zahlen mit

$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ und $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{L}_A$.

Zu zeigen ist

$$P^X \otimes P^X[Y_{t_1} \in A_1, \dots, Y_{t_n} \in A_n] = P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n].$$

Ist $c \leq t_1$ oder $c > t_n$, so ist diese Gleichung trivialerweise richtig; daher kann angenommen werden, daß es eine ganze Zahl i zwischen 1 und n gibt, so daß $t_i < c \leq t_{i+1}$ gilt.

Es ist dann $P^X \otimes P^X[Y_{t_1} \in A_1, \dots, Y_{t_n} \in A_n]$ gleich dem Ausdruck

$$P^X \otimes P^X([X_{t_1} \in A_1] \times \Omega \cap \dots \cap [X_{t_1} \in A_1] \times \Omega \cap \dots \cap [X_{t_{i+1}} \in A_{i+1}] \cap \dots \cap [X_{t_n} \in A_n])$$

$$= P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_1} \in A_1] \cdot P^X[X_{t_{i+1}} \in A_{i+1}, \dots, X_{t_n} \in A_n]$$

und wegen der Unabhängigkeit der X_t

$= P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n]$. Also gilt (1).

Damit ist das Lemma bewiesen.

Daraus ergibt sich nun der folgende Satz, der zeigt, daß es zu fast allen Halbgruppen nicht - Markoffsche Prozesse gibt mit der Halbgruppe als Übergangsoperatoren. (Für eine spezielle Konstruktion eines nicht - Markoffschen Prozesses, dessen Operatoren eine Halbgruppe bilden siehe [5]).

Satz 1.3 Ist X ein nicht - trivialer Prozeß mit unendlicher Lebenszeit für dessen Familie (P_t) der Übergangsoperatoren gilt

$t \longrightarrow (P_t f)(x)$ ist rechtsseitig stetig für jede stetige, beschränkte Funktion f auf E , und jedes x aus E ,

so gibt es zu X einen Prozeß der diesselben Übergangsoperatoren wie X besitzt und der nicht - Markoffsch ist.

Beweis: Ist X selbst schon nicht - Markoffsch, so ist der Satz trivial; sei daher X ein Markoffprozeß. Angenommen, der Satz sei falsch für X , d.h. X ist ein Markoffprozeß, der die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, und jeder Prozeß Y mit $Y \sim X$ ist ein Markoffprozeß.

Da nach Lemma 1.1 $X \otimes_c X \sim X$ ist, für alle nicht - negativen

reellen c , so ist $X \otimes_c X$ ebenfalls ein Markoffprozeß.

Da für Markoffprozesse die Relationen " $\sim$ " und " $\approx$ " dasselbe bedeuten (siehe die Bemerkungen über Übergangsoperatoren weiter oben), so gilt $X \otimes_c X \approx X$ für alle c aus $[0, \infty]$.

Nach Lemma 1.2 ist daher die Familie (X_t) unabhängig bezüglich jedes P^x . Also gilt für $x \in E$, s und t aus $[0, \infty]$ mit $s > 0$, A und B aus $\mathcal{L}_\Delta$

$$P^x[X_t \in A, X_{s+t} \in B] = P^x[X_t \in A] \cdot P^x[X_{s+t} \in B].$$

Da X ein Markoffprozeß ist, so folgt

$$P_t(\chi_A \cdot P_s \chi_B) = P_t \chi_A \cdot P_{s+t} \chi_B$$

und da dies für beliebige A und B aus $\mathcal{L}_\Delta$ gilt, so folgt durch Approximation

$$P_t(f \cdot P_s g) = P_t f \cdot P_{s+t} g$$

für alle beschränkten, stetigen Funktionen f und g auf E .

Aufgrund der vorausgesetzten rechtsseitigen Stetigkeit folgt

$$P_t(f \cdot P_0 g) = P_t f \cdot P_t g,$$

und da wegen der Markoffeigenschaft

$$P_t(f \cdot P_0 g) = P_t(f \cdot g) \text{ ist,}$$

so ergibt sich schließlich

$$P_t(f \cdot g) = P_t f \cdot P_t g.$$

Nach einem bekannten Schluß der Analysis folgt daraus:

Es existiert zu x und t ein x' , so daß gilt

$$(P_t f)(x) = f(x')$$

für alle beschränkten, stetigen Funktionen f auf E .

Also ist $X_t P^x$ ein Punktmaß, und damit auch $\phi_X P^x = \bigotimes_t X_t P^x$,

d.h., X ist ein trivialer Prozeß.

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, und der Satz somit richtig

Bemerkungen

(1) Da für einen trivialen Prozeß $\phi_X P^x = \bigotimes_t X_t P^x$ ist,

ist jeder Prozeß, der diesselben Übergangsoperatoren besitzt wie ein trivialer Markoffprozeß, wieder ein Markoffprozeß.

(2) Da ein (nichtgestoppter) Brownscher Prozeß offensichtlich die Voraussetzungen von Satz 1.3 erfüllt, gibt es zu jedem Brownschen Prozeß einen nicht - Markoffschen Prozeß mit denselben Übergangswahrscheinlichkeiten.

(3) Satz 1.3 und die eben gemachte Bemerkung legen es nahe, nicht - Markoffsche Prozesse zu studieren, die den Markoffschen Prozessen darin ähnlich sind, daß sie die Halbgruppeneigenschaft besitzen. Siehe dazu [7].

Satz 1.3 zeigt, daß ein Markoffprozeß nicht durch die Halbgruppeneigenschaft seiner Übergangsoperatoren charakterisiert ist. Dies motiviert den nächsten Paragraphen, in dem Operatoren angegeben werden, die genau dann eine Halbgruppe bilden, wenn der zugrundeliegende Prozeß ein Markoffprozeß ist.

§2. Markoffoperatoren

Sei W eine typische Teilmenge von $E_{\Delta}^{0, \infty 1}$ (siehe §1).
Alle in diesem Paragraphen betrachteten Prozesse besitzen den Zustandsraum E und sind vom Typ W .

Sei $F = W \cap \mathcal{L}_{\Delta}^{0, \infty 1}$, $F_t = \mathcal{O}(\pi_s, s \leq t)$;

$\mathcal{M}_t = \{f: f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } W, F_t - \text{meßbar}\}$

$\mathcal{M}_E = \{f: f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } E, \mathcal{L}_{\Delta} - \text{meßbar}\}$

Für $\mathcal{M}_{\infty}$ wird abkürzend $\mathcal{M}$ geschrieben;

es ist

$$\mathcal{M}_0 = \{g \circ \pi_0: g \in \mathcal{M}_E\}.$$

Die Abbildung (siehe §1) $\Theta_t: W \longrightarrow W$ ist $F - F$ -meßbar, daher ist mit f auch $f \circ \Theta_t$ in $\mathcal{M}$.

Die Abbildung $L_t: f \longrightarrow f \circ \Theta_t$ von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$ ist

linear, positiv (ist $0 \leq f$, so $0 \leq L_t f$), normiert ($L_t 1 = 1$),

nach oben σ -stetig und so, daß $(L_t f)(\langle \Delta \rangle) = f(\langle \Delta \rangle)$.

Abbildungen von $\mathcal{M}$ in sich mit diesen Eigenschaften heißen Operatoren auf $\mathcal{M}$.

Aus der Definition von Θ_t folgt, daß die Operatoren L_t eine Halbgruppe bilden mit $L_0 = \text{Identität}$.

Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Operatoren, die $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}_0$ abbilden.

Zu jedem Prozeß $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_{\Delta})$ gehört ein $P \in \mathcal{P}$ vermöge

$$(Pf)(w) = \int f \circ \phi_X dP^{\pi_0(w)} \quad (f \in \mathcal{M}, w \in W)$$

oder kürzer

$$Pf = \int f \circ \phi_X dP^{\pi_0}.$$

P ist ein Operator, denn P ist linear, positiv, normiert, nach oben σ -stetig und $(Pf)(\langle \Delta \rangle) = \int f \circ \phi_X dP^{\Delta} = f(\langle \Delta \rangle)$;
ist $f \in \mathcal{M}$, so $Pf \in \mathcal{M}_0$, denn

$$Pf = \int f \circ \phi_X dP^z \circ \pi_0 \quad \text{und} \quad z \longrightarrow \int f \circ \phi_X dP^z \quad \text{ist} \quad \mathcal{L}_{\Delta} - \text{meßbar}.$$

Sei φ diese Zuordnung, also $P = \varphi(X)$. Wie man sofort sieht, gilt für zwei Prozesse X und Y :

$X \approx Y$ genau dann, wenn $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

Umgekehrt gehört zu jedem $P \in \mathcal{P}$ ein (bis auf Äquivalenz) eindeutig bestimmter Prozeß, nämlich:

Setze $\Omega = W$, $X_t = \Pi_t$ und $P^X(A) = (P\chi_A)((x))$ für $A \in \mathcal{F}$. P^X ist ein W -Maß auf $(W, \mathcal{F})$.

$x \longrightarrow P^X(A)$ ist $\mathcal{L}_\Delta$ -meßbar:

Sei $a: E_\Delta \longrightarrow W$ mit $a(x) = (x)$

(x) bezeichnet dasjenige Element $w \in W$ für das $w_s = x$ ist für alle $0 \leq s < \infty$ und $w_\infty = \Delta$;

a ist $\mathcal{L}_\Delta$ - $\mathcal{F}$ -meßbar; da $P^X(A) = (P\chi_A) \circ a(x)$ und $P\chi_A \in \mathcal{M}$, so ist $x \longrightarrow P^X(A)$ $\mathcal{L}_\Delta$ -meßbar.

Schließlich: $P^A[X_0 = \Delta] = (P\chi_{[X_0 = \Delta]})(\langle \Delta \rangle) = \chi_{[X_0 = \Delta]}(\langle \Delta \rangle) = 1$.

Also ist $X = (W, (X_t), (P^X), E_\Delta)$ ein stochastischer Prozeß.

Es ist

$$(P\chi_A)(w) = (P\chi_A)((w_0)) = P^{w_0}(A) = \int \chi_A \circ \phi_X dP^{w_0}, \text{ da}$$

ϕ_X die Identität ist. Also $Pf = \int f \circ \phi_X dP^{w_0}$ für alle $f \in \mathcal{M}$, d.h. $P = \varphi(X)$.

Die stochastischen Prozesse entsprechen also eineindeutig (bis auf Äquivalenz) den Elementen von $\mathcal{P}$.

Ein Prozeß X ist genau dann normal, wenn $P = \varphi(X)$ die Identität auf $\mathcal{M}_0$ ist; denn, sei $f = g \circ \pi_0 \in \mathcal{M}_0$, $g \in \mathcal{M}_E$,

$$\text{es ist } (Pf)(w) = \int g \circ \pi_0 \circ \phi_X dP^{\pi_0(w)} = \int g \circ X_0 dP^{\pi_0(w)}$$

und da Normalität bedeutet, daß $X_0 P^{\pi_0(w)} = \varepsilon_{\pi_0(w)}$ für alle w gilt, ist Normalität äquivalent mit

$$\int g \circ X_0 dP^{\pi_0(w)} = g(\pi_0(w)) \text{ für alle } g \text{ und } w$$

d.h. mit

$$(Pf)(w) = f(w) \text{ für alle } f \in \mathcal{M}_0 \text{ und } w \in W.$$

Daher heißt ein $P \in \mathcal{P}$, das die Identität auf $\mathcal{M}_0$ ist, normal.

Für $P \in \mathcal{P}$ sei $\ker P = \{f \in \mathcal{M} : Pf = 0\}$.

Ist P normal, so ist $\ker P \cap \mathcal{M}_0 = \{0\}$.

Eine Abschwächung des Begriffs der Normalität, die bei Markoffprozessen eine Rolle spielt (siehe das Folgende) gibt die folgende Definition.

Definition $P \in \mathcal{P}$ heißt quasinormal, wenn $\ker P \cap \mathcal{M}_0$ ein Ideal in der Algebra $\mathcal{M}_0$ ist.

Bedeutung: Sei P quasinormal und $P = \varphi(X)$.

Es ist $\ker P \cap \mathcal{M}_0 = \{f \in \mathcal{M}_0 : f = 0 \text{ } \phi_X P^X - \text{f.s. für alle } x \in E_\Delta\}$.
 $f \in \ker P \cap \mathcal{M}_0 \Rightarrow f^2 \in \ker P \cap \mathcal{M}_0 \Rightarrow \int f^2 \circ \phi_X dP^X = 0$ für alle x

$\Rightarrow f^2 = 0 \text{ } \phi_X P^X - \text{f.s. für alle } x \Rightarrow f = 0 \text{ } \phi_X P^X - \text{f.s. für alle } x$;
 die andere Richtung ist trivial.

Für $P \in \mathcal{P}$ ist die Komposition PL_t wieder aus $\mathcal{P}$; die PL_t können wieder miteinander komponiert werden.

Definition Die Elemente der Menge

$$\mathcal{P}_0 = \{P \in \mathcal{P} : P \text{ quasinormal, } (PL_t)_{t \in [0, \infty]} \text{ eine Halbgruppe}\}$$

heißten (schwache) Markoffoperatoren.

In Satz 2.4 wird nämlich gezeigt werden, daß die Elemente von $\mathcal{P}_0$ eineindeutig (bis auf Äquivalenz) den (schwachen) Markoff - prozessen entsprechen. Für den Beweis des Satzes werden drei Lemmata benötigt.

Lemma 2.1 Sei $X = (\Omega, (X_t), (P^X), E_\Delta)$ ein Prozeß, (P_t) die Familie seiner Übergangsoperatoren.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Die Markoffeigenschaft

(2) $E^X(f \circ \theta_t \circ \phi_X | F_t(X)) = E^X_t(f \circ \phi_X) \quad P^X - \text{f.s.}$
 für alle $x \in E_\Delta, t \in [0, \infty], f \in \mathcal{M}$.

(3) $E^X(f \circ \theta_t \circ \phi_X | \mathcal{O}(X_t)) = E^X_t(f \circ \phi_X) \quad P^X - \text{f.s.}$
 für alle $x \in E_\Delta, t \in [0, \infty], f \in \mathcal{M}$.

(4) Für jedes Tupel $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ aus $[0, \infty]$,
jedes Tupel $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{L}_\Delta$ und jedes $x \in E_\Delta$ gilt

$$P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n] = P_{t_1}(\chi_{A_1} \cdot P_{t_2-t_1}(\chi_{A_2} \dots (P_{t_n-t_{n-1}} \chi_{A_n}) \dots))(x)$$

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Analog zu einem bekannten Schluß in [1] (siehe dort den Satz 2.3.1)

(2) $\Rightarrow$ (3): Trivial.

(3) $\Rightarrow$ (4): Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Für $n=1$ ist (4) richtig nach Definition von P_t .

Sei (4) für ein $n \geq 1$ richtig, $x \in E_\Delta$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$
 ein Tupel aus $[0, \infty]$ und $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ aus $\mathcal{L}_\Delta$.

$$P^X[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_{n+1}} \in A_{n+1}] = \int_{[X_{t_1} \in A_1]} P^X[X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_{n+1}} \in A_{n+1} \mid \mathcal{A}(X_{t_1})] dP^X$$

$$= \int_{[X_{t_1} \in A_1]} E^X((\chi_{[\cap_{t_2-t_1} A_2]} \dots \chi_{[\cap_{t_{n+1}-t_1} A_{n+1}]}) \circ \theta_{t_1} \circ \phi_X \mid \mathcal{A}(X_{t_1})) dP^X$$

nach (3) gleich

$$= \int_{[X_{t_1} \in A_1]} P^{X_{t_1}}[X_{t_2-t_1} \in A_2, \dots, X_{t_{n+1}-t_1} \in A_{n+1}] dP^X$$

nach Induktionsvoraussetzung

$$= \int_{[X_{t_1} \in A_1]} P_{t_2-t_1}(\chi_{A_2} \cdot P_{t_3-t_2} \chi_{A_3} \dots (P_{t_{n+1}-t_n} \chi_{A_{n+1}}))(X_{t_1}) dP^X$$

$$= \int (\chi_{A_1} \cdot P_{t_2-t_1}(\chi_{A_2} \cdot P_{t_3-t_2} \chi_{A_3} \dots (P_{t_{n+1}-t_n} \chi_{A_{n+1}}))) \circ X_{t_1} dP^X$$

$$= P_{t_1}(\chi_{A_1} \cdot P_{t_2-t_1}(\chi_{A_2} \cdot \dots (P_{t_{n+1}-t_n} \chi_{A_{n+1}})))(x)$$

Also ist (4) für $n+1$ richtig.

(4) $\Rightarrow$ (1): Aus (4) folgt sofort

$$\int f_1 \cdots f_n dP^X = P_{t_1}(g_1 \cdot P_{t_2-t_1} g_2 \cdots)(x) \text{ für } f_i = g_i \circ X_{t_i}, g_i \in \mathcal{M}_E, 1 \leq i \leq n.$$

Daher gilt für $f \in \mathcal{M}_E$

$$(P_{s+t} f)(x) = \int f \circ X_{s+t} dP^X = \int (1 \circ X_s) \cdot f(X_{s+t}) dP^X = P_s(1 \cdot P_t f)(x) = (P_s P_t f)(x)$$

also ist (P_t) eine Halbgruppe.

Zu zeigen ist

$$P^X(A \cap [X_{s+t} \in B]) = \int_A P_t^X[X_s \in B] dP^X \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_t(X);$$

o.B.d.A. kann angenommen werden, daß A die Gestalt hat

$$A = [X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n], \quad 0 \leq t_1 < t_{i+1} \leq t, B_i \in \mathcal{L}_\Delta.$$

Nach (4) ist dann

$$P^X(A \cap [X_{s+t} \in B]) = P_{t_1}(\chi_{B_1} \cdot P_{t_2-t_1}(\chi_{B_2} \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(\chi_{B_n} \cdot P_{s+t-t_n} \chi_B))(x)$$

Da $P_t^X[X_s \in B] = (P_s \chi_B)(X_t)$, so folgt andererseits

$$\int_A P_t^X[X_s \in B] dP^X = \int (\chi_{B_1} \circ X_{t_1} \cdot \chi_{B_2} \circ X_{t_2} \cdots \chi_{B_n} \circ X_{t_n}) \cdot (P_s \chi_B) \circ X_t dP^X$$

$$= P_{t_1}(\chi_{B_1} \cdot P_{t_2-t_1} \chi_{B_2} \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(\chi_{B_n} \cdot P_{t-t_n}(P_s \chi_B)))(x).$$

Da $P_{t-t_n}(P_s \chi_B) = P_{s+t-t_n} \chi_B$ ist, so folgt (1).

Für einen Prozeß X bezeichne $N = N(X)$ die Menge seiner normalen Punkte.

Lemma 2.2

(1) Es ist N aus $\mathcal{L}_\Delta$.

(2) X besitzt die Markoffeigenschaft für $s=0$ und ein $t_0 \in [0, \infty[$ genau dann, wenn gilt

$$P^X[X_{t_0} \in N] = 1 \quad \text{für alle } x \in E_\Delta.$$

Beweis:

(1) Da E ein LKAB ist, so gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{U}$ offener Mengen von E derart, daß $\mathcal{U}$ stabil ist bezüglich endlicher Durchschnitt und jede abgeschlossene Menge Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{U}$ ist (siehe [1]).

Es folgt, daß $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ist.

Sei $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_A)$ der Prozeß.

$x \in N$ heißt, daß $X_0 P^x = \varepsilon_x$ ist;

da $\mathcal{U}_A = \mathcal{U} \cup \{A\}$ Durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{L}_A$ ist, ist x genau dann normal, wenn gilt

$$X_0 P^x(B) = \varepsilon_x(B) \quad \text{für alle } B \text{ aus } \mathcal{U}_A.$$

Für $B \in \mathcal{L}_A$ sei $N_B = \{x \in E : X_0 P^x(B) = \varepsilon_x(B)\}$.

Da $x \longrightarrow (X_0 P^x)(B)$ $\mathcal{L}_A$ -meßbar

und $x \longrightarrow \varepsilon_x(B) = \chi_B(x)$ $\mathcal{L}_A$ -meßbar ist, so ist $N_B \in \mathcal{L}_A$.

Da $N = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_A} N_U$, so ist $N \in \mathcal{L}_A$.

(2) Die Markoffeigenschaft für $s=0, t_0$ bedeutet

$$P^x[X_{t_0} \in B \mid \mathcal{F}_{t_0}(X)] = P^x_{t_0}[X_0 \in B] \quad P^x - \text{f.s. für alle } x \in E_A, B \in \mathcal{L}_A.$$

Das heißt

$$\chi_{[X_{t_0} \in B]} = P^x_{t_0}[X_0 \in B] \quad P^x - \text{f.s. für alle } x \text{ und } B$$

bzw.

$$\varepsilon_{X_{t_0}}(B) = (X_0 P^x_{t_0})(B) \quad P^x - \text{f.s. für alle } x \text{ und } B;$$

nach dem unter (1) Gezeigten ist das äquivalent mit

$$P^x[X_0 \in N_B] = 1 \quad \text{für alle } x \text{ und } B$$

bzw. mit

$$P^x[X_{t_0} \in N] = 1 \quad \text{für alle } x \in E_A.$$

Wie die Quasinormalität mit der Markoffeigenschaft zusammenhängt, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.3 Sei X ein Prozeß, P der zu X gehörige Operator. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) X besitzt die Markoffeigenschaft für $s=t=0$.
- (2) P ist quasinormal und idempotent auf $\mathcal{M}_0$.
- (3) $P(f \cdot g) = P(f \cdot Pg)$ für alle f, g aus $\mathcal{M}_0$.

Beweis:

(1) $\Leftrightarrow$ (3): (1) bedeutet

$$P^X[X_0 \in A, X_0 \in B] = \int_{\{X_0 \in A\}} P^X_0[X_0 \in B] dP^X \quad \text{für alle } x \in E_A \text{ und } A, B \in \mathcal{L}_A.$$

$$\text{D.h.} \quad \int (\chi_{[\pi_0 \in A]} \cdot \chi_{[\pi_0 \in B]}) \circ \phi_X dP^X = \int \chi_{[\pi_0 \in A]} \cdot \left(\int \chi_{[\pi_0 \in B]} \circ \phi_X dP^{\pi_0} \right) \circ \phi_X dP^X$$

was für den Operator P bedeutet

$$P(\chi_A \circ \pi_0 \cdot \chi_B \circ \pi_0) = P(\chi_A \circ \pi_0 \cdot P(\chi_B \circ \pi_0))$$

und das ist äquivalent mit

$$P(f \cdot g) = P(f \cdot Pg) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{M}_0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Da P idempotent ist auf $\mathcal{M}_0$, so ist für $g \in \mathcal{M}_0$ $g - Pg \in \ker P \cap \mathcal{M}_0$; da P quasinormal ist, so ist

$$f \cdot (g - Pg) \in \ker P \cap \mathcal{M}_0 \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{M}_0;$$

Also $P(f \cdot g) = P(f \cdot Pg)$ für alle $f, g \in \mathcal{M}_0$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Aus (3) folgt für $f=1$, daß P idempotent ist auf $\mathcal{M}_0$. Ist $f \in \mathcal{M}_0$, $g \in \ker P \cap \mathcal{M}_0$, so folgt aus (3) $P(f \cdot g) = P(f \cdot Pg) = 0$, also ist P quasinormal.

Damit läßt sich nun der angekündigte Satz beweisen

Satz 2.4 Sei X ein Prozeß, P sein Operator.

X ist genau dann ein Markoffprozeß, wenn P ein Markoffoperator ist.

Beweis: Sei X ein Markoffprozeß, $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_\Delta)$.

Nach Lemma 1.1 ist dann

$$E^x(f \circ \theta_t \cdot \phi_X | F_t(X)) = E^x_t(f \cdot \phi_X) \quad P^x - \text{f.s. für alle } t, x, f.$$

Durch Integration folgt

$$E^x(f \circ \theta_t \cdot \phi_X) = E^x(E^x_t(f \cdot \phi_X)) = E^x(E^{\pi_0}(f \cdot \phi_X) \circ \theta_t \cdot \phi_X).$$

Da dies für alle x gilt, ist auf W

$$E^{\pi_0}(f \circ \theta_t \cdot \phi_X) = E^{\pi_0}(E^{\pi_0}(f \cdot \phi_X) \circ \theta_t \cdot \phi_X),$$

was für den Operator bedeutet

$PL_t f = PL_t P f$; speziell für $f = L_g g$, $g \in \mathcal{M}$, folgt $PL_{s+t} g = PL_s PL_t g$.
Also ist (PL_t) eine Halbgruppe.

Aus Lemma 2.3 folgt, daß P quasinormal ist; also ist P ein Markoffoperator.

Sei umgekehrt der zu X gehörige Operator ein Markoffoperator.

Es ist zu zeigen, daß X ein Markoffprozeß ist.

Für $g \in \mathcal{M}$ und $A \in \mathcal{L}_\Delta$ ist $f = (\chi_A \cdot \pi_0) \cdot g \in \mathcal{M}$.

$$\text{Es ist } PL_t f = P(f \circ \theta_t) = E^{\pi_0}(f \circ \theta_t \cdot \phi_X) = E^{\pi_0}(\chi_{[X_t \in A]} \cdot g \circ \theta_t \cdot \phi_X)$$

und

$$PL_t P f = P(E^{\pi_0}(f \cdot \phi_X) \circ \theta_t) = E^{\pi_0}(E^x_t(f \cdot \phi_X)).$$

Da (PL_t) eine Halbgruppe ist, so gilt speziell $PL_t = PL_t P$,
also

$$E^{\pi_0}(\chi_{[X_t \in A]} \cdot g \circ \theta_t \cdot \phi_X) = E^{\pi_0}(E^x_t(f \cdot \phi_X)),$$

$$\text{also} \int_{[X_t \in A]} g \circ \theta_t \circ \phi_X \, dP^X = E^X(E^X_t(f \circ \phi_X)) \quad .$$

Da (PL_t) eine Halbgruppe ist, so gilt $PP = P$, und da P quasinormal ist, so folgt aus Lemma 2.3, daß X die Markoff - eigenschaft für $s=t=0$ besitzt. Nach Lemma 2.2 folgt daraus

$$P^X[X_0 \in N] = 1 \quad \text{für alle } x \in E_A \quad (N \text{ ist die Menge der normalen Punkte von } X)$$

also

$$P \chi_{[X_0 \in N]} = \int \chi_{[X_0 \in N]} \circ \phi_X \, dP^X = 1;$$

wegen $PL_t = PL_t P$ folgt

$$PL_t \chi_{[X_0 \in N]} = 1, \text{ also } \int \chi_{[X_0 \in N]} \circ \theta_t \circ \phi_X \, dP^{P_0} = 1, \text{ also } P^X[X_t \in N] = 1$$

für alle x, t .

Daher ist

$$E^X(E^X_t(f \circ \phi_X)) = \int_{[X_t \in N]} E^X_t(f \circ \phi_X) dP^X = \int_N E^Y(f \circ \phi_X) d(X_t P^X) \quad .$$

Für $y \in N$ ist

$$E^Y(f \circ \phi_X) = E^Y(\chi_{[X_0 \in A]} \cdot g \circ \phi_X) = \chi_A(y) \cdot E^Y(g \circ \phi_X).$$

Daher

$$\begin{aligned} E^X(E^X_t(f \circ \phi_X)) &= \int_N \chi_A(y) \cdot E^Y(g \circ \phi_X) d(X_t P^X) = \int_A \chi_A(y) E^Y(g \circ \phi_X) d(X_t P^X) \\ &= \int_{[X_t \in A]} E^X_t(g \circ \phi_X) dP^X \quad . \end{aligned}$$

Zusammen mit dem zu Anfang Erhaltenem ergibt sich

$$\int_{[X_t \in A]} g \circ \theta_t \circ \phi_X \, dP^X = \int_{[X_t \in A]} E^X_t(g \circ \phi_X) \, dP^X \quad ,$$

$$\text{d.h.} \quad E^X(g \circ \theta_t \circ \phi_X \mid \mathcal{A}(X_t)) = E^X_t(g \circ \phi_X) \quad \text{für alle } g \in \mathcal{M}.$$

Nach Lemma 2.1 folgt daraus, daß X ein Markoffprozeß ist.

Bemerkungen

(1) Ist W die Menge aller Abbildungen w aus $E_{\Delta}^{[0, \infty]}$ mit $\{t: w_t = \Delta\} = [a, \infty]$, so gibt Satz 2.4 eine Charakterisierung aller Markoffprozesse.

Ist W die Menge aller derjenigen Abbildungen, die noch zusätzlich rechtsseitig stetig sind, so gibt der Satz eine Charakterisierung aller rechtsseitig stetigen Markoffprozesse.

(2) Quasinormalität und Halbgruppeneigenschaft implizieren einander nicht.

Sei $(a_s) \in W$, (a_s) nicht konstant; durch

$$(Pf)((w_s)) = \begin{cases} f((a_s)), & w_0 \neq \Delta \\ f((\Delta)), & w_0 = \Delta \end{cases}$$

wird ein $P \in \mathcal{P}$ definiert, das quasinormal ist, aber für das (PL_t) keine Halbgruppe ist.

Seien a, b aus E , $a \neq b$; durch

$$(Pf)((w_s)) = \begin{cases} \frac{1}{2} (f((a)) + f((b))), & w_0 \neq \Delta \\ f((\Delta)), & w_0 = \Delta \end{cases}$$

wird ein $P \in \mathcal{P}$ definiert, für das (PL_t) eine Halbgruppe ist, ohne daß P quasinormal ist.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz ist

Korollar 2.5 Ein Prozeß ist genau dann ein normaler Markoff - prozeß, wenn für seinen Operator gilt:

P ist die Identität auf $\mathcal{M}_0$ und (PL_t) ist eine Halbgruppe.

Die Übergangsoperatoren P_t eines Prozesses X sind die "Restriktionen" der Operatoren PL_t auf $\mathcal{M}_0$.

Denn: Sei $f = g \circ \pi_0 \in \mathcal{M}_0$, $g \in \mathcal{M}_E$. Es ist

$$PL_t f = P(g \circ \pi_t) = \int g \circ X_t dP^{\pi_0} = (P_t g) \circ \pi_0.$$

Identifiziert man die isomorphen Räume $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_E$, so ist $PL_t = P_t$ auf $\mathcal{M}_0$.

Da die Operatoren P_t sich auf $\mathcal{M}_E$ beziehen, dessen Einbettung $\mathcal{M}_0$ in $\mathcal{M}$ nur von einer Komponente abhängt, die PL_t sich jedoch auf ganz $\mathcal{M}$ beziehen, kann man die letzteren als die mehr - dimensionalen Übergangsoperatoren, bezeichnen.

Die in §1 angeführten Eigenschaften (a),(b),(c) lassen sich als einen Fortsetzungssatz von Halbgruppen aussprechen:

Korollar 2.6 Eine Halbgruppe von Operatoren (P_t) , $P_t: \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_0$, $P_0 = \text{Identität}$ läßt sich auf genau eine

Weise zu einer Halbgruppe von Operatoren $Q_t: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_0$ mit

$Q_t L_s = Q_s L_t$ $(s, t \in [0, \infty])$ fortsetzen.

Beweis: Sei $g \in \mathcal{M}_E$ und $P_t(g \circ \pi_0) = g_t \circ \pi_0$; durch

$\bar{P}_t g = g_t$ wird eine neue Halbgruppe $\bar{P}_t: \mathcal{M}_E \longrightarrow \mathcal{M}_E$ definiert;

es ist $\bar{P}_0 = \text{Identität}$, $(\bar{P}_t g)(\Delta) = g(\Delta)$. Zu $(\bar{P}_t)$ gibt es einen Markoffprozeß, der die $\bar{P}_t$ als Übergangsoperatoren hat;

Sei P der Operator zu X und $Q_t = PL_t$. $Q_t: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_0$ und

(Q_t) ist eine Halbgruppe.

Da

$Q_t(g \circ \pi_0) = \bar{P}_t \circ \pi_0 = g_t \circ \pi_0 = P_t(g \circ \pi_0)$ ist, so $Q_t = P_t$ auf $\mathcal{M}_0$.

Außerdem ist $Q_t L_s = PL_t L_s = PL_s L_t = Q_s L_t$.

Sei (R_t) eine weitere Halbgruppe, die (P_t) fortsetzt und für die $R_t L_s = R_s L_t$ gilt. Es ist $R_s = R_0 L_s$; R_0 ist auf $\mathcal{M}_0$ die Identität

und $R_0 L_s R_0 L_t = R_s R_t = R_{s+t} = R_0 L_{s+t}$.

Also ist R_0 ein (normaler) Markoffoperator.

Sei Y der zu R_0 gehörige Markoffprozeß; X und Y haben diesselben Übergangsoperatoren P_t , also $X \approx Y$, also $R_0 = P$, also $Q_t = R_t$.

Einige Eigenschaften von Markoffoperatoren faßt der folgende Satz zusammen.

Satz 2.7

- (1) Ein Operator P ist genau dann ein Markoffoperator, wenn gilt: P ist idempotent und $\ker P$ ist invariant gegen die Halbgruppe (L_t) und gegen Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{M}_0$.
- (2) Ist P ein normaler Markoffoperator, so gilt $P(f \cdot Pg) = P(f) \cdot P(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{M}$.
- (3) Die Menge der Markoffoperatoren ist nicht konvex (im Gegensatz zu $\mathcal{P}$).

Beweis:

(1) Ist P ein Markoffoperator, so ist P idempotent.

Daher $\ker P = \{f - Pf : f \in \mathcal{M}\}$. Es ist $P(L_t(f - Pf)) = PL_t f - PL_t Pf = 0$, also ist $\ker P$ invariant gegen (L_t) .

Sei $f \in \ker P$, $g = \chi_A \circ \pi_0$, $A \in \mathcal{L}_A$. Es gibt einen Markoffprozeß

X mit P als Operator. Daher

$$E^X(f \cdot \phi_X | \mathcal{F}(X)) = E^X(f \cdot \phi_X) = P^X f - f.s.$$

also speziell

$$E^X((f \cdot g) \cdot \phi_X) = \int (Pf) \cdot \phi_X \cdot \chi_{[X_0 \in A]} dP^X = 0 \text{ für alle } x,$$

also ist $f \cdot g \in \ker P$. Durch Approximation folgt dann diese Behauptung für alle $g \in \mathcal{M}_0$.

Sei umgekehrt P idempotent und $\ker P$ invariant gegen (L_t) und die Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{M}_0$.

Da P idempotent ist, ist $\ker P = \{f - Pf : f \in \mathcal{M}\}$.

Da $L_t(\ker P) \subset \ker P$, so folgt $L_t Pf - L_t Pf \in \ker P$ für alle $f \in \mathcal{M}$,

also $PL_t = PL_t P$; daher ist (PL_t) eine Halbgruppe.

Ist $f \in \ker P \cap \mathcal{M}_0$, so $f \cdot g \in \ker P \cap \mathcal{M}_0$ für $g \in \mathcal{M}_0$.

Also ist P quasinormal und damit ein Markoffoperator.

(2) Ist P ein normaler Markoffoperator, und sind $f, g \in \mathcal{M}$, so folgt wegen $f - Pf \in \ker P$, daß $Pg \cdot (f - Pf) \in \ker P$, also $P(Pg \cdot (f - Pf)) = 0$, also $P(f \cdot Pg) = P(Pf \cdot Pg) = Pf \cdot Pg$.

(3) Seien P, Q normale Markoffoperatoren, und $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta = 1$, $R = \alpha P + \beta Q$. Es ist R genau dann ein Markoffoperator, wenn $RL_t = RL_t R$ ist, d.h. wenn gilt

$$\begin{aligned} \alpha PL_t + \beta QL_t &= (\alpha P + \beta Q)(\alpha L_t P + \beta L_t Q) \\ &= \alpha^2 PL_t + \alpha\beta(PL_t Q + QL_t P) + \beta^2 QL_t. \end{aligned}$$

Da α, β beide ungleich 0 sind, ist dies gleichbedeutend mit der Gültigkeit von

$$PL_t + QL_t = PL_t Q + QL_t P,$$

woraus folgen würde

$$PL_{s+t} + QL_{s+t} = PL_t QL_s + QL_t PL_s.$$

Sind (P_t) bzw. (Q_t) die Übergangsoperatoren zu P bzw. Q , so ist dafür, daß R ein Markoffoperator ist, notwendig, daß gilt

$$P_{s+t} + Q_{s+t} = P_t Q_s + Q_t P_s.$$

Das ist im allgemeinen jedoch nicht der Fall, z.B. für

$$\begin{aligned} P_t f &= e^{-t} \cdot f + (1 - e^{-t}) \cdot f(\Delta) \\ Q_t f &= P_{2t} f. \end{aligned}$$

Bemerkung Eigenschaft (2) des Satzes ist die charakteristische Eigenschaft von bedingten Erwartungen; die in [10] gegebene Kennzeichnung bedingter Erwartungen als lineare Transformationen mit im Wesentlichen dieser Eigenschaft, kann jedoch nicht ohne weiteres zu einem Beweis von Satz 2.4 herangezogen werden, da in [10] bedingte Erwartungen bezüglich eines, hier jedoch bezüglich einer Familie von Maßen betrachtet werden.

Die Markoffoperatoren lassen sich auf einen $\mathcal{M}$ umfassenden Funktionenraum fortsetzen, der in §3 eine Rolle spielen wird. Sei $P \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{M}, \mu \in \mathcal{M}_+^1(W)$ (W - maße auf (W, F));

durch $\mu P: f \longrightarrow \int P f d\mu$ wird ein W - maß auf W definiert.

Für einen Teilraum V von $\mathcal{M}$ sei

$V_P = \{ f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } W: \text{ Zu jedem } \mu \in \mathcal{M}_+^1(W) \text{ gibt es ein } f' \in V \text{ mit } f = f' \mu P - f.s. \}$

$V = \{ f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } W: \text{ Zu jedem } \mu \in \mathcal{M}_+^1(W) \text{ gibt es ein } f' \in V \text{ mit } f = f' \mu - f.s. \}$

Es ist klar, daß für jedes P gilt $V \subset V_P$; ist P normal, so ist $(\overline{\mathcal{M}_0})_P = \overline{\mathcal{M}_0}$.

P läßt sich zu einer linearen, positiven, normierten, G - stetigen Abbildung $P: \overline{\mathcal{M}_P} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_0}$ fortsetzen mit $(PF)((\Delta)) = F((\Delta))$ durch die Festsetzung:

Sei $F \in \overline{\mathcal{M}_P}, (w_s) \in W, \mu = \varepsilon_{(w_s)}$; zu μ gibt es $f \in \mathcal{M}$ mit

$F = f \mu P - f.s.$; setze $(PF)((w_s)) = (Pf)((w_s))$.
 PF ist wohldefiniert und ein Element von $\overline{\mathcal{M}_0}$.

Ist P ein Markoffoperator, so ist $L_t: \overline{\mathcal{M}_P} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_P}$
 (dabei ist $L_t f$ für eine beliebige reelle Funktion auf W definiert durch $f \cdot \theta_t$):

Sei $F \in \overline{\mathcal{M}_P}, \mu \in \mathcal{M}_+^1(W), \nu = \mu P L_t$.

Es ist $\nu \in \mathcal{M}_+^1(W)$, daher gibt es ein $f \in \mathcal{M}$ mit $F = f \nu P - f.s.$

Also ist $0 = P|F - f| = \mu P L_t P|F - f| = \mu P L_t |F - f| = \mu P |L_t F - L_t f|$,

also $L_t F = L_t f \mu P - f.s.$

Durch ähnliche Rechnungen ergibt sich für ein $P \in \mathcal{P}$:

P ist genau dann ein Markoffoperator, wenn die Fortsetzung P quasinormal auf $\overline{\mathcal{M}_P}$ ist und $(P L_t)$ eine Halbgruppe auf $\overline{\mathcal{M}_P}$.

§3 Stoppzeiten und starke Markoffoperatoren

In die übliche Definition der starken Markoffeigenschaft gehen eine Reihe von σ -Algebren ein; es wird sich später (Satz 3.6) herausstellen, daß man sie gar nicht alle braucht, aber um das einzusehen, müssen sie erst einmal definiert werden. Alle in diesem Paragraphen betrachteten Prozesse sind rechtsseitig stetig; der dem Raum M zugrundeliegende Raum W ist die Menge aller rechtsseitig stetigen Abbildungen $w \in E_{\Delta}^{[0, \infty]}$ mit $\{t: w_t = \Delta\} = [a, \infty]$.

Für einen Prozeß $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E)$ sei

$$M_t(X) = \{f: f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } \Omega, F_t(X) - \text{meßbar}\}$$

$$M(X) = M_{\infty}(X).$$

Wie man sich sofort überzeugt, gilt

$$M_t(X) = M_t \circ \phi_X.$$

Für $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E_{\Delta})$ wird durch $P^{\mu}(A) = \int P^x(A) d\mu \quad (A \in F(X))$ ein W -Maß auf $(\Omega, F(X))$ definiert; $F(X)^{P^{\mu}}$ sei die Vervollständigung von $F(X)$ bezüglich P^{μ} und

$$G(X) = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_+^1(E_{\Delta})} F(X)^{P^{\mu}}$$

$$G_t(X) = \left\{ A \subset \Omega : \text{zu jedem } \mu \in \mathcal{M}_+^1(E_{\Delta}) \text{ existiert ein } A' \in F_t(X) \text{ mit } A' \cup A \cup A' \in G(X) \text{ und } P^{\mu}(A' \cup A \cup A') = 0 \right\}.$$

$$\text{Es ist } G_{\infty}(X) = G(X).$$

Analog seien für den zu X kanonischen Prozeß $G(P)$ und $G_t(P)$ definiert. Sei weiter

$$\overline{M}_t(X) = \{f: f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } \Omega, G_t(X) - \text{meßbar}\}$$

$$\overline{M}(X) = \overline{M}_{\infty}(X).$$

Sei P der zu X gehörige Operator; dann gilt für die im vorigen Paragraphen definierten Räume $(\overline{\mathcal{M}}_t)_P$

$$(\overline{\mathcal{M}}_t)_P = \{ f: f \text{ reelle, beschränkte Funktion auf } W, G_t(P) - \text{meßbar} \}.$$

Definition

(1) Sei X ein Prozeß. Eine Abbildung $T: \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ heißt Stoppzeit bezüglich X , wenn gilt

$$T \wedge t \in \overline{\mathcal{M}}_t(X) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty[$$

$\mathcal{T}(X)$ bezeichne die Menge der Stoppzeiten bezüglich X .

(2) Sei P ein Operator. Eine Abbildung $T: W \longrightarrow [0, \infty]$ heißt Stoppzeit bezüglich P , wenn gilt

$$T \wedge t \in (\overline{\mathcal{M}}_t)_P \quad \text{für alle } t \in [0, \infty[$$

$\mathcal{T}(P)$ bezeichne die Menge der Stoppzeiten bezüglich P .

(3) Eine Abbildung $T: W \longrightarrow [0, \infty]$ heißt (universelle) Stoppzeit, wenn gilt

$$T \wedge t \in \mathcal{M}_t \quad \text{für alle } t \in [0, \infty[$$

$\mathcal{T}$ bezeichne die Menge der universellen Stoppzeiten.

Bemerkungen

(a) Die übliche Definition (siehe [1]) einer Stoppzeit bezüglich eines Prozesses stimmt mit der in (1) gegebenen überein. Üblicherweise heißt $T: \longrightarrow [0, \infty]$ Stoppzeit, wenn gilt $[T < s] \in G_s(X)$ für alle $s \in [0, \infty[$. Daraus folgt

$$[T \wedge t < s] = [T < s] \cup [t < s] \in G_t(X) \quad \text{für alle } s \in [0, \infty[,$$

also ist $T \wedge t \in G_t(X)$ - meßbar, d.h. $T \wedge t \in \overline{M}_t(X)$.

Ist umgekehrt $T \wedge t \in \overline{M}_t(X)$ für alle $t \in [0, \infty)$, so
 $[T < t] = [T \wedge t < t] \in G_t(X)$.

(b) Ist P Operator des Prozesses X , so sind die unter (2) definierten Stoppzeiten genau die Stoppzeiten im Sinne von (1) bezüglich des zu X kanonischen Prozesses.

(c) Wie man sofort sieht, haben die $\mathcal{T}$'s folgende Strukturen: Verband, additive Halbgruppe, nach oben und unten σ -vollständig, stabil gegen Multiplikation mit Konstanten ≥ 1 .

Es ist klar, daß gilt

$$\mathcal{T} \circ \phi_X \subset \mathcal{T}(P) \circ \phi_X \subset \mathcal{T}(X).$$

Das folgende Lemma zeigt, daß diese drei Klassen fast übereinstimmen.

Lemma 3.1 Sei X ein Prozeß, $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E_A)$.
Zu $T \in \mathcal{T}(X)$ gibt es ein $T' \in \mathcal{T}$ mit

$$T = T' \circ \phi_X \quad P^k - f.s.$$

Beweis: Sei Q_+ die Menge der nicht - negativen rationalen Zahlen und $r \in Q_+$, $T \in \mathcal{T}(X)$.

Es ist $T \wedge r \in \overline{M}_r(X)$, daher gibt es ein $f_r \in \mathcal{M}_r(X)$ mit

$$T \wedge r = f_r \quad P^k - f.s.; \text{ zu } f_r \text{ gibt es ein } g_r \in \mathcal{M}_r \text{ mit } f_r = g_r \circ \phi_X.$$

$$\text{Setze } T' = \inf_{r \in Q_+} (r \cdot \chi_{[g_r < r]} + \infty \cdot \chi_{[g_r \geq r]})$$

Es ist $T' \wedge t = \inf_{\substack{Q_+ \\ \exists r \leq t}} (r \cdot \chi_{[g_r < r]} + \infty \cdot \chi_{[g_r \geq r]}) \in \mathcal{M}_t$, also $T' \in \mathcal{T}$.

$$\text{Und } T' \circ \phi_X = \inf_{r \in Q_+} (r \cdot \chi_{[f_r < r]} + \infty \cdot \chi_{[f_r \geq r]}),$$

also gilt P^u - f.s.

$$T^1 \cdot \phi_X = \inf_{r \in Q_+} (r \cdot \chi_{[T < r]} + \infty \cdot \chi_{[T \geq r]}) = T \cdot \chi_{[T < \infty]} + \infty \cdot \chi_{[T = \infty]} = T.$$

Für $T \in \mathcal{T}(X)$ sei

$$G_T^+(X) = \{A \in G(X) : A \cap [T < t] \in G_t(X), \text{ alle } t \geq 0\}, \quad \overline{m}_T^+(X) = \{f \in \overline{m}(X) : f|_{G_T^+(X)} \text{ - meßbar}\}$$

für $T \in \mathcal{T}(P)$ sei

$$G_T^+(P) = \{A \in G(P) : A \cap [T < t] \in G_t(P), \text{ alle } t\}, \quad \overline{m}_T^+(P) = \{f \in \overline{m}_P : f|_{G_T^+(P)} \text{ - meßbar}\}$$

für $T \in \mathcal{T}$ sei

$$F_T^+ = \{A \in F : A \cap [T < t] \in F_t, \text{ alle } t\}, \quad \mathcal{M}_T^+ = \{f \in \mathcal{M} : f|_{F_T^+} \text{ - meßbar}\}.$$

Lemma 3.2 Sei $T \in \mathcal{T}(X)$; ist $f \geq 0$ eine Stoppzeit bezüglich der Familie $G_{T+t}^+(X)$ (d.h. $f \wedge [T < t] \in G_{T+t}^+(X)$), so ist $T+f \in \mathcal{T}(X)$.

Beweis: Sei

$$f_n(\omega) = \begin{cases} +\infty, & f(\omega) = +\infty \\ \frac{j+1}{2^n}, & \frac{j}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{j+1}{2^n} \quad (j=0,1,\dots) \end{cases}$$

Es ist $f = \inf_n f_n$ (dies ist eine bekannte Approximation, siehe [1]).

$$[f_n = \frac{j+1}{2^n}] = [f < \frac{j+1}{2^n}] \cap [f < \frac{j}{2^n}] \in G_{T+\frac{j+1}{2^n}}^+(X).$$

Ist also r einer der abzählbar vielen Werte von f_n , so

$$[f_n = r] \in G_{T+r}^+(X).$$

$$\text{Da } [T+f_n < s] = \bigcup_r [f_n = r] \cap [T+r < s] \in G_s(X)$$

so $T+f_n \in \mathcal{T}(X)$, also $T+f = \inf_n (T+f_n) \in \mathcal{T}(X)$.

Bemerkung Mit einem analogen Beweis ist das Lemma auch gültig für $\mathcal{T}(P)$, $\mathcal{T}$.

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung der Funktionenräume $\overline{\mathcal{M}}_T^+$.

Satz 3.3

(1) Sei $T \in \mathcal{T}(P)$, $0 \leq f \in \overline{\mathcal{M}}_P$.

Es ist f genau dann aus $\overline{\mathcal{M}}_T^+(P)$, wenn
 $T+t \cdot f^n$ aus $\mathcal{T}(P)$ ist für alle $t \in [0, \infty]$ und ganzzahligen $n \geq 0$.

(2) Sei $T \in \mathcal{T}$, $0 \leq f \in \mathcal{M}$.

Es ist f genau dann aus $\mathcal{M}_T^+$, wenn
 $T+t \cdot f^n$ aus $\mathcal{T}$ ist für alle $t \in [0, \infty]$ und ganzzahligen $n \geq 0$.

Beweis: Es genügt (1) zu beweisen, (2) folgt analog.

(a) Ist $0 \leq f \in \overline{\mathcal{M}}_T^+(P)$, so folgt $t \cdot f^n \in \overline{\mathcal{M}}_T^+(P)$, also ist nach Lemma 3.2 $T+t \cdot f^n$ eine Stoppzeit.

(b) Sei f von der Gestalt $f = \chi_A$, $T+t \cdot \chi_A \in \mathcal{T}(P)$.

Es ist dann $[T+s \cdot \chi_A < s] \in G_s(P)$ für alle s .

Nun ist

$$[T+s \cdot \chi_A < s] = [A \cap \{T < s\}] \text{ also } [A \in G_T^+(P)], \text{ also } \chi_A \in \overline{\mathcal{M}}_T^+(P).$$

Sei $0 \leq f \in \overline{\mathcal{M}}_P$ beliebig. Nach dem eben Gesagten, genügt es, zu zeigen, daß

$(T+t \cdot \chi_{[f \geq a]}) \in \mathcal{T}(P)$ für alle t und alle $a > 0$.

Da $T+s \cdot f^n \in \mathcal{T}(P)$, so folgt für $s = \frac{t}{a^n}$, $T+t(\frac{f}{a})^n \in \mathcal{T}(P)$,

und damit

$$T+t \cdot \inf\left(\left(\frac{f}{a}\right)^n, 1\right) = \inf\left(T+t\left(\frac{f}{a}\right)^n, T+t\right) \in \mathcal{T}(P),$$

also auch

$$T+t \cdot \inf_n\left(\inf\left(\left(\frac{f}{a}\right)^n, 1\right)\right) = \inf_n\left(T+t \cdot \inf\left(\left(\frac{f}{a}\right)^n, 1\right)\right) \in \mathcal{T}(P).$$

Da

$$\chi_{[f \geq a]} = \inf_n\left(\inf\left(\left(\frac{f}{a}\right)^n, 1\right)\right) \text{ ist, so folgt}$$

die Behauptung.

Korollar 3.4 Es ist $G_0^+(P) = \{A \in G(P) : \chi_A \in \mathcal{T}(P)\}.$

Beweis: Nach Satz 3.3 ist

$$G_0^+(P) = \{A \in G(P) : t \cdot \chi_A \in \mathcal{T}(P), \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

Außerdem:

$$\text{Ist } \chi_A \in \mathcal{T}(P), \text{ so } t \cdot \chi_A \in \mathcal{T}(P) \text{ für } t \geq 1;$$

$$\text{ist } t \leq 1, \text{ so } t \cdot \chi_A = \chi_{A \wedge t} \in \mathcal{T}(P).$$

Die im vorigen Paragraphen betrachteten Operatoren L_t lassen sich auch definieren für Funktionen anstelle der Konstanten t . Es ist dieser Schritt, der von den schwachen Markoffprozessen zu den starken Markoffprozessen führt.

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller reellen Funktionen auf W , $\bar{\mathcal{R}}_+$ der Kegel aller numerischen, nicht - negativen Funktionen auf W . Jedes $f \in \bar{\mathcal{R}}_+$ induziert eine Abbildung

$$L_f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \quad \text{vermöge} \quad L_f(g) = g \cdot \theta_f, \text{ wo}$$

$$\theta_f : W \longrightarrow W, \quad \theta_f(w) = \theta_{f(w)}(w).$$

L_f ist linear, positiv, normiert, nach oben $\mathcal{G}$ -stetig und $(L_f g)(\Delta) = g(\Delta)$. Wie man sich sofort überzeugt, ist

$(L_f)_{f \in \bar{\mathcal{K}}_+}$ eine Halbgruppe, und zwar gilt

$$L_f L_g = L_h \quad \text{wo } h = f + L_f(g)$$

(L_f ist auch auf $\bar{\mathcal{K}}_+$ definiert vermöge $L_f(g) = g \cdot \theta_f$, $g \in \bar{\mathcal{K}}_+$).

Definition Für $f, g \in \bar{\mathcal{K}}_+$ sei

$$f * g = f + L_f(g).$$

Es ist dann $L_{f*g} = L_f L_g$ und $\bar{\mathcal{K}}_+$ wird durch "*" zu

einer Halbgruppe ("*" ist assoziativ, da es durch das Hintereinanderausführen von Abbildungen definiert wurde).

$(L_t)_{t \in \bar{\mathcal{R}}_+}$ ist eine kommutative Unterhalbgruppe von $(L_f)_{f \in \bar{\mathcal{K}}_+}$.

Auf $\bar{\mathcal{R}}_+ \subset \bar{\mathcal{K}}_+$ stimmen "*" und "+" überein; "*" ist nicht kommutativ, also auch $(L_f)_{f \in \bar{\mathcal{K}}_+}$ nicht.

Von speziellem Interesse ist $\mathcal{T} \in \bar{\mathcal{K}}_+$, und ob $\mathcal{T}$ bezüglich "*" eine Halbgruppe ist.

Satz 3.5

(1) Für $S, T \in \mathcal{T}$ ist $T * S \in \mathcal{T}$,

und $L_T: \mathcal{M}_S^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{T*S}^+$ (speziell $L_T: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$).

(2) Sei $P \in \mathcal{P}$ und $PL_{T^1} = PL_T, P$ auf $\mathcal{M}$ für alle $T^1 \in \mathcal{T}$.

Sind dann $S, T \in \mathcal{T}(P)$, so $T * S \in \mathcal{T}(P)$

und $L_T: \overline{\mathcal{M}}_S^+(P) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{T*S}^+(P)$.

Beweis: Sei $T \in \mathcal{T}$. Da $t \longrightarrow \pi_t(w)$ rechtsseitig stetig ist, folgt nach Standardüberlegungen (siehe [1]):

π_T ist $F_{T+t}^+ - F_t -$ meßbar, also $L_T: \mathcal{M}_t \longrightarrow \mathcal{M}_{T+t}^+$.

Sei $S \in \tilde{\mathcal{T}}$; da $L_T(S) \wedge t = L_T(S \wedge t) \in \mathcal{M}_{T+t}^+$ ist, so folgt aus

Lemma 3.2 (Bemerkung), daß $T + L_T(S) \in \tilde{\mathcal{T}}$ ist.

Sei weiter $f \in \mathcal{M}_S^+$; o.B.d.A. kann angenommen werden, daß $f \geq 0$.

Nach Satz 3.3 ist $S + t \cdot f^n \in \tilde{\mathcal{T}}$ für alle t, n . Nach dem eben Gezeigten daher

$$T * S + t \cdot (L_T(f))^n = T * S + L_T(t \cdot f^n) = T * (S + t \cdot f^n) \in \tilde{\mathcal{T}} \quad \text{für alle } t, n.$$

Also nach Satz 3.3 $L_T f \in \mathcal{M}_{T * S}^+$.

(2) Seien $S, T \in \tilde{\mathcal{T}}(P)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^1(W)$.

Nach Lemma 3.1 gibt es ein $T' \in \tilde{\mathcal{T}}$ mit $T = T' \mu_P$ - f.s.

Sei $\nu = \mu_{PL_T}$; zu S gibt es ein $S' \in \tilde{\mathcal{T}}$ mit $S = S' \nu_P$ - f.s.

Nach Voraussetzung ist $\nu_P = \mu_{PL_{T'}, P} = \mu_{PL_{T'}} (als \text{Ma\ss})$, also

$$L_{T'} S = L_{T'} S' \mu_P - \text{f.s.} \quad \text{und} \quad L_T S = L_{T'} S' \mu_P - \text{f.s.}$$

Ist $U = T * S$, $U' = T' * S'$, so $U = U' \mu_P$ - f.s. und $U' \in \tilde{\mathcal{T}}$.

Daher $U \wedge t = U' \wedge t \mu_P$ - f.s., also $U \wedge t \in \overline{\mathcal{M}}_t(P)$, d.h. $U \in \tilde{\mathcal{T}}(P)$.

Ebenso wie der analoge Schritt in (1) folgt mittels Satz 3.3

$$L_T: \overline{\mathcal{M}}_S^+(P) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{T * S}^+(P).$$

Definition Ein Prozeß $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_\Delta)$ heißt ein starker Markoffprozeß, wenn er die starke Markoffeigenschaft besitzt, d.h. wenn gilt

$$P^x[X_{s+t} \in B \mid G_t^+(X)] = P^x_T[X_s \in B] \quad P^x - \text{f.s.}$$

für alle $x \in E_\Delta$, $B \in \mathcal{L}_\Delta$, $T \in \tilde{\mathcal{T}}(X)$.

Bemerkungen

(1) Sei $W_T = [T < +\infty]$; üblich ist es, die obige Eigenschaft

statt mit $G_T^+(X)$ mit $G_T^+(X) \cap W_T$ auf W_T zu formulieren. Dies ist äquivalent mit der obigen Formulierung, da auf $[T=+\infty]$ die Markoffeigenschaft nach Definition des Medhofs eine Trivialität ist.

(2) Ist der Prozeß X homogen, so läßt sich die starke Markoffeigenschaft in Analogie zur schwachen Markoffeigenschaft auch so formulieren

$$P^X[X_{T+S} \in B \mid G_T^+(X)] = P^X_T[X_S \in B] \quad P^X - \text{f.s.}$$

für alle $x \in E_A, B \in \mathcal{X}_A$, und $T \in \mathcal{T}(X)$.

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung der starken Markoffprozesse durch Operatoren.

Satz 3.6 Sei X ein Prozeß und P sein Operator.
Es sind äquivalent

- (1) Die starke Markoffeigenschaft für X .
- (2) $(P_L)_T \in \mathcal{T}(P)$ ist eine Halbgruppe auf $\overline{M}_P$.
 (D.h. $P_L_{T+S} = P_L_T P_L_S$ auf $\overline{M}_P$.)
- (3) $(P_L)_T \in \mathcal{T}$ ist eine Halbgruppe auf M .

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Durch Integration der starken Markoffeigenschaft folgt

$$P^X[X_{S+T} \in B] = \int P^X_T[X_S \in B] dP^X.$$

Ist $S \in \mathcal{T}(P)$, so $T = S \circ \phi_X \in \mathcal{T}(X)$, und da

$$X_{S+T} = \pi_{S+S} \circ \phi_X = \pi_S \circ \theta_S \circ \phi_X \text{ ist, so}$$

$$E^X(\chi_{[\pi_S \in B]} \circ \theta_S \circ \phi_X) = \int E^{\pi_S}(\chi_{[\pi_S \in B]} \circ \phi_X) \circ \theta_S \circ \phi_X dP^X$$

für alle $s \geq 0$ und alle $B \in \mathcal{X}_A$.

Durch Approximation (siehe die Methode z.B. in [11]) folgt

$$E^X(f \circ \theta_S \circ \phi_X) = \int E^{\pi_0}(f \circ \phi_X) \circ \theta_S \circ \phi_X dP^X$$

für alle $f \in \mathcal{M}$, und daher auch für alle $f \in \overline{\mathcal{M}}_P$.

Also $PL_S = PL_{S^*P}$ auf $\overline{\mathcal{M}}_P$ und daher

$$PL_{S^*T} = PL_{S^*L_T} = PL_S PL_T \text{ auf } \overline{\mathcal{M}}_P \text{ für } T \in \mathcal{T}(P).$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Klar, da $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(P)$ und $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}_P$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $T \in \mathcal{T}(X)$, $A \in G_T^+(X)$. Es ist $A \in G_T^+(X)$ und

$S_n = T + n \cdot \chi_A \in \mathcal{T}(X)$ für alle ganzzahligen $n \geq 0$ (nach einem Schluß wie bei Satz 3.3).

Daher ist auch $S = \sup_n S_n \in \mathcal{T}(X)$; es ist

$$S(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in A \\ +\infty, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Sei x fest aus E_A ; zu S gibt es nach Lemma 3.1 ein $S' \in \mathcal{T}$ mit

$$S = S' \circ \phi_X \quad P^X - \text{f.s.}$$

Sei $s \geq 0$, $B \in \mathcal{L}_A$ und $f = \chi_{[X_S \in B]}$, $g = \chi_{[\pi_S \in B]}$.

Es ist

$$P^X[X_{S+S} \in B] = E^X(g \circ \theta_{S'} \circ \phi_X) = (PL_{S'}(g))(x)$$

und

$$\begin{aligned} \int P^X S[X_S \in B] dP^X &= \int E^X S(f) dP^X = \int E^{\pi_0}(g \circ \phi_X) \circ \theta_{S'} \circ \phi_X dP^X \\ &= (PL_{S'} P(g))(x). \end{aligned}$$

Wegen (3) folgt

$$P^X[X_{S+S} \in B] = \int P^X S[X_S \in B] dP^X,$$

also nach Definition von S

$$P^X([X_{s+T} \in B] \cap A) + P^X([X_\infty \in B] \cap A) = \int_A P^X_T[X_s \in B] dP^X + \int_{A^c} P^X[X_s \in B] dP^X.$$

Da $\int_A P^X[X_s \in B] dP^X = \int_A P^X[X_s \in B] dP^X = \chi_B(4) \cdot P^X(A) = P^X([X_\infty \in B] \cap A)$ ist, so folgt

$$P^X([X_{s+T} \in B] \cap A) = \int_A P^X_T[X_s \in B] dP^X.$$

Da $X_T \in G_T^+(X)$ - meßbar ist, und A beliebig aus $G_T^+(X)$, so

$$P^X([X_{s+T} \in B] | G_T^+(X)) = P^X_T[X_s \in B] \quad P^X - \text{f.s.},$$

also die starke Markoffeigenschaft für X .

Definition Ein Operator P heißt starker Markoffoperator, wenn $(PL_T)_{T \in \mathcal{T}}$ eine Halbgruppe (auf $\mathcal{M}$) ist.

Bemerkung In die Charakterisierung (3) von Satz 3.6 gehen nur die universellen Stoppzeiten und der Raum $\mathcal{M}$ ein. Die Vervollständigungen $\overline{\mathcal{M}}$ usw. sind unnötig geworden.

Korollar 3.7 $P \in \mathcal{P}$ ist genau dann ein starker Markoffoperator, wenn P idempotent ist und $\ker P$ invariant gegen die Halbgruppe $(L_T)_{T \in \mathcal{T}}$.

Beweis:

(1) Ist P ein starker Markoffoperator, so P idempotent. Daher $\ker P = \{f - Pf : f \in \mathcal{M}\}$; für $T \in \mathcal{T}$ ist $L_T(f - Pf) \in \ker P$, da $PL_T(f - Pf) = PL_Tf - PL_TPf = 0$.

(2) Ist P idempotent, so $\ker P = \{f - Pf : f \in \mathcal{M}\}$. Für $S, T \in \mathcal{T}$ also $L_S(L_Tf - PL_Tf) \in \ker P$, daher $P(L_S(L_Tf - PL_Tf)) = 0$, also $PL_{S*}f = PL_S PL_Tf$, also P ein starker Markoffoperator.

§4. Transformationen von Markoffoperatoren Insbesondere Transformation des Zustandsraumes

Die in den beiden vorigen Paragraphen gegebene funktional - analytische Charakterisierung von Markoffprozessen erlaubt eine einfache Behandlung vieler Transformationen von Markoffprozessen. Bei Transformationen kann es vorkommen, daß die Eigenschaft " $x \longrightarrow P^X(A)$ ist $\mathcal{L}_\Delta$ - meßbar" für Prozesse nicht erhalten bleibt, jedoch gilt, daß $x \longrightarrow P^X(A)$ $\bar{\mathcal{L}}_\Delta$ - meßbar ist, wo $\bar{\mathcal{L}}_\Delta$ die universelle Vervollständigung von $\mathcal{L}_\Delta$ ist. ([6], S. 1, enthält hier eine Unkorrektheit.) Daher ist es zweckmäßig, für die Behandlung von Transformationen den Begriff des stochastischen Prozesses etwas zu erweitern (siehe den Begriff der Diffusion in [3]).

$X = (\Omega, (X_t), (P^X), E_\Delta)$ heißt ein erweiterter stochastischer Prozeß, wenn die Abbildung $x \longrightarrow P^X(A)$ ($A \in \mathcal{A}(X_t, t \in [0, \infty))$) $\bar{\mathcal{L}}_\Delta$ - meßbar ist und im übrigen die Forderungen für einen stochastischen Prozeß erfüllt sind. Jeder stochastische Prozeß ist ein erweiterter stochastischer Prozeß, aber nicht umgekehrt. Analog wie für Prozesse lassen sich auch für erweiterte Prozesse Operatoren definieren, und zwar sind es gerade die Operatoren $P: \overline{\mathcal{M}}_P \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_0$ die erweiterte Operatoren sind, d.h. Operatoren von erweiterten Prozessen. Ein erweiterter Prozeß ist genau dann ein Markoffprozeß, wenn für seinen Operator P gilt:

(PL_t) ist eine Halbgruppe auf $\mathcal{M}$ (bzw. $\overline{\mathcal{M}}_P$) und P ist quasinormal auf $\mathcal{M}_0$ (bzw. $\overline{\mathcal{M}}_0$), d.h. $\ker P \wedge \mathcal{M}_0$ ist ein Ideal in $\mathcal{M}_0$.

Ein erweiterter Prozeß ist genau dann ein starker Markoffprozeß, wenn $(PL_t)_{t \in \mathcal{T}(P)}$ eine Halbgruppe auf $\mathcal{M}$ (bzw. $\overline{\mathcal{M}}_P$) ist, oder wenn $(PL_t)_{t \in \mathcal{T}}$ eine Halbgruppe auf $\mathcal{M}$ (bzw. $\overline{\mathcal{M}}_P$) ist.

Sei $\mathcal{M}$ wieder wie in §3.

Definition Ein Operator $L: \overline{\mathcal{M}}_P \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_P$ heißt eine schwache Transformation bezüglich des erweiterten Operators P,

wenn es eine Familie $(K_t^x)_{t \in [0, \infty], x \in E_\Delta}$ gibt von

Operatoren $K_t^x: \overline{\mathcal{M}}_P \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_P$ mit

- (1) $PK_0^x = PL$ auf $\overline{\mathcal{M}}_0$ und PL ist quasinormal.
- (2) $(PLL_t f)((x)) = (PK_t^x L f)((x))$ für $f \in \overline{\mathcal{M}}_P$ und $x \in E_\Delta$.
- (3) $PK_t^x = PK_t^{xP}$ auf $\overline{\mathcal{M}}_P$.

L heißt eine starke Transformation bezüglich P, wenn es eine Familie $(K_T^x)_{T \in \mathcal{T}, x \in E_\Delta}$ gibt, so daß die obigen Bedingungen für die K_T^x anstelle der K_t^x erfüllt sind.

Ist L eine Transformation bezüglich P , so heißt der erweiterte Operator $Q = PL$ eine Transformation von P.

Bemerkung Die in [4] studierten Transformationen (bis auf die Transformation des Zustandsraumes) sind schwache bzw. starke Transformationen. Die einzige Bedingung, die gewöhnlich zu zeigen ist, ist (2). Die Familie (K_t^x) besteht gewöhnlich aus Elementen von (L_t) und (2) wird in der Form $LL_t = L_t L$ (fast sicher) bewiesen; (3) ist in einem solchen Falle trivial, da gemeinhin ein Markoffoperator transformiert wird.

Auf $\overline{\mathcal{M}}_0$ ist meistens $L = K_0^x = \text{Identität}$ (oder fast sicher die Identität), so daß (1) ebenfalls trivial ist.

(Siehe dazu das Beispiel weiter unten.)

Für das Verhalten von Markoffoperatoren bei solchen Transformationen gilt nun

Satz 4.1 Jede schwache (starke) Transformation eines erweiterten schwachen (starken) Markoffoperators ist wieder ein erweiterter schwacher (starker) Markoffoperator.

Beweis: Sei P ein erweiterter schwacher Markoffoperator, L eine schwache Transformation bezüglich P und $Q = PL$.
Für $f \in \mathcal{M}$, $x \in E_\Delta$ gilt

$$(QL_t f)((x)) = (PLL_t f)((x)) = (PK_t^X Lf)((x)) = (PK_t^X PLf)((x))$$

und

$$(QL_t Qf)((x)) = (PK_t^X PLPLf)((x)).$$

Außerdem ist $PL = PK_0^X L = PK_0^X PL = PLPL$ auf $\mathcal{M}$, also

$$(QL_t f)((x)) = (QL_t Qf)((x)), \text{ also } QL_t = QL_t Q \text{ auf } \mathcal{M}.$$

Da Q quasinormal ist, so ist Q ein erweiterter Markoffoperator. Analog folgt die Behauptung für starke Transformationen.

Als ein Beispiel für eine starke Transformation sei die zufällige Zeittransformation (time change) behandelt.
Sei $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_\Delta)$ ein erweiterter, rechtsseitig stetiger homogener Prozeß. Eine Familie $(\tau_t)_{t \in [0, \infty]} \subset \mathcal{T}(X)$

heißt eine zufällige Zeittransformation bezüglich X , wenn gilt (siehe [8])

- (1) $t \longrightarrow \tau_t$ ist rechtsseitig stetig P^x - f.s. für alle x
- (2) $\tau_{s+t} = \tau_s * \tau_t$ P^x - f.s.; $\tau_0 = 0$ P^x - f.s. für alle x .
 $\tau_\infty = \infty$.

Der erweiterte Prozeß $Y = (\Omega, (Y_t), (P^x), E_\Delta)$ mit $Y_t = X_{\tau_t}$ heißt zufällige Zeittransformation von X .

Sei X ein starker Markoffprozeß, P der Operator zu X , Q der Operator zu Y .

Es ist Φ_Y bezüglich der σ -Algebra $\Phi_X^{-1}(G(P))$ meßbar, also gibt es eine Abbildung $\Phi: W \longrightarrow W$ die $G(P) - G(P)$ - meßbar ist mit $\Phi_Y = \Phi \circ \Phi_X$. Daher ist $L: f \longrightarrow f \circ \Phi$ ein Operator $L: \overline{\mathcal{M}}_P \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_P$ und es ist $Q = PL$.

Sei $T \in \mathcal{T}$; es ist $\tau_{T \circ \Phi_Y} \in \mathcal{T}(X)$.

Zu $x \in E_\Delta$ gibt es nach Lemma 3.1 $S_{x,T} \in \mathcal{T}$ mit

$\tau_{T \circ \phi_Y} = S_{x,T} \circ \phi_X \quad P^X - f.s.,$ wo $S_{x,0} = 0$ gewählt werden kann.

Sei $K_T^X = L_{S_{x,T}}$; Bedingung (3) für eine starke Transformation

ist trivialerweise erfüllt, da P ein starker Markoffoperator ist.

Auf $\overline{M}_0$ ist $PL = P = PK_0^X$, also ist Bedingung (1) erfüllt.

Durch Approximation folgt, daß auch für die Zeittransformation gilt

$$\tau_{t+T \circ \phi_Y} = \tau_{T \circ \phi_Y} * \tau_t \quad P^Y - f.s. \text{ für alle } y.$$

Daraus folgt (wenn Θ_t^i die Shiftoperatoren zu X sind)

$$\Theta_T \circ \phi_Y = \phi_Y \circ \Theta^i \tau_{T \circ \phi_Y} \quad P^Y - f.s. \text{ alle } y,$$

also

$$\Theta_T \circ \phi_Y = \phi \circ \Theta_{S_{x,T}} \circ \phi_X \quad P^X - f.s.$$

und damit $(PL_{L_T} f)((x)) = (PL_{S_{x,T}} L f)((x))$ für $f \in \overline{M}_P$;

also ist L eine starke Transformation und daher nach Satz 4.1 Y ein (erweiterter) starker Markoffprozeß.

Eine weitere wichtige Transformation ist die Transformation des Zustandsraumes. Für sie soll hier ein schärferer und allgemeinerer Satz hergeleitet werden, als der Satz über Zustandsraumtransformationen in [4].

Zunächst werden einige Begriffe definiert, die nützlich sind beim Operieren mit Markoffoperatoren.

Sei W eine typische Menge, M der zugehörige Funktionenraum.

Definition Eine Teilalgebra M von M heißt Markoffalgebra, wenn gilt

(1) M ist abgeschlossen bezüglich gleichmäßiger Konvergenz und M ist bedingt σ -vollständig, d.h.: $0 \leq f_n \in M$, $f_n \uparrow f$ beschränkt, so folgt $f \in M$.

(2) M enthält die 1.

(3) M ist invariant gegen die Halbgruppe (L_t) .

M heißt starke Markoffalgebra, wenn statt (3) schärfer gilt

(3') M ist invariant gegen die Halbgruppe $(L_T)_{T \in \mathcal{T}_M}$,

wo $\mathcal{T}_M = \{T \in \mathcal{T} : T \wedge t \in M \text{ für alle reellen } t\}$.

Bemerkung

(1) $\mathcal{M}$ ist eine starke Markoffalgebra.

(2) Mit f ist auch der Absolutbetrag $|f| \in M$.

Sei M eine Markoffalgebra. Eine Abbildung $P: M \longrightarrow M$ die linear, positiv, normiert, σ -stetig ist, mit $(Pf)((\Delta)) = f((\Delta))$ ($f \in M$) heißt Operator auf M .

P heißt Markoffoperator auf M , wenn noch zusätzlich gilt

(1) $P: M \longrightarrow M \wedge \mathcal{M}_0$

(2) $PL_{s+t}f = PL_s PL_t f$ für $s, t \in [0, \infty]$ und $f \in M$.

(3) $P(g \cdot f) = P(g \cdot Pf)$ für $f, g \in \mathcal{M}_0 = M \wedge \mathcal{M}_0$.

Analog ist der Begriff eines starken Markoffoperators auf M definiert.

Seien E, E' zwei LKAB, E_Δ, E'_Δ ihre Kompaktifizierungen durch Δ bzw. Δ' ; W, W' die typischen Mengen aller Pfade;

$\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ die zugehörigen Funktionenräume und $(L_t), (L_t')$ die Shiftoperatoren zu $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}'$.

Isomorphie zwischen Markoffalgebren ist dann vernünftigerweise wie folgt zu definieren.

Definition Zwei Markoffalgebren $M \subset \mathcal{M}$, $M' \subset \mathcal{M}'$ heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $L: M \longrightarrow M'$ gibt, mit

(1) L ist linear, multiplikativ, positiv, normiert,
 G - stetig und $(Lf)((\Delta')) = f((\Delta))$ ($f \in M$).

(2) $L(M_0) = M'_0$.

(3) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ L \downarrow & \longrightarrow & M' \\ L_t & & \downarrow L'_t \\ M & \xrightarrow{L} & M' \end{array}$$

ist kommutativ.

Zwei starke Markoffalgebren heißen stark isomorph, wenn das Diagramm kommutativ ist mit L_T statt L_t und L'_T statt L'_t , wo $T' = \sup_n I(T_n)$ ist.

Der folgende Satz zeigt, daß der Begriff des Markoffprozesses einen Invariante ist gegen einen solchen Isomorphismus.

Satz 4.2

(1) Sind M und M' isomorphe Markoffalgebren und ist L der Isomorphismus, so ist

$$P \longrightarrow LPL^{-1}$$

eine Bijektion zwischen den Markoffoperatoren auf M und denen auf M' .

(2) Sind M und M' stark isomorphe starke Markoffalgebren und ist L der starke Isomorphismus, so ist

$$P \longrightarrow LPL^{-1}$$

eine Bijektion zwischen den starken Markoffoperatoren auf M und denen auf M' .

Beweis:

(1) Es ist $P \longrightarrow LPL^{-1}$ eine Bijektion der Operatoren, die in M_0 bzw. in M'_0 abbilden:

Ist P ein Operator auf M der in M_0 abbildet, so ist LPL^{-1} ein Operator auf M' der in M'_0 abbildet.

Und

$$LPL^{-1} = LQL^{-1} \Rightarrow PL^{-1} = QL^{-1} \Rightarrow P=Q.$$

Ist P' ein Operator auf M' mit in M'_0 gelegenen Bild, so ist

$P = L^{-1}P'L$ ein Operator auf M der in M_0 abbildet und

$$LPL^{-1} = L(L^{-1}P'L)L^{-1} = P'.$$

Daß für einen Operator P , der in M_0 abbildet LPL^{-1} ein Markoffoperator ist auf M' , heißt:

$$LPL^{-1}L'_{s+t} = LPL^{-1}L'_s LPL^{-1}L'_t \quad \text{auf } M'$$

und

$$LPL^{-1}(g \cdot f) = LPL^{-1}(g \cdot LPL^{-1}f) \quad \text{alle } f, g \in M'_0.$$

Das ist äquivalent mit

$$PL^{-1}L'_{s+t}L = PL^{-1}L'_s LPL^{-1}L'_tL \quad \text{auf } M$$

und

$$P(g \cdot f) = P(g \cdot Pf) \quad \text{für alle } f, g \in M_0.$$

Da $L'_tL = LL_t$ auf M ist (Kommutativität des Diagramms), so

$L_t = L^{-1}L'_tL$ auf M , also ist LPL^{-1} genau dann ein Markoffoperator, wenn

$$PL_{s+t} = PL_s PL_t \quad \text{auf } M$$

und

$$P(g \cdot f) = P(g \cdot Pf) \quad \text{für alle } f, g \in M_0 \text{ gilt,}$$

d.h. genau dann, wenn P ein Markoffoperator auf M ist.

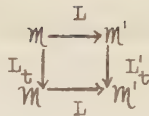
(2) Beweis analog zu (1).

Korollar 4.3 Sei $L: M \longrightarrow M'$ eine Injektion mit

(1) L ist linear, multiplikativ, positiv, normiert, σ -stetig und $(Lf)((\Delta')) = f((\Delta))$ ($f \in M$).

(2) $L(M_0) = M'_0 \wedge L(M).$

(3) Das Diagramm



ist kommutativ.

Dann ist $P \longrightarrow LPL^{-1}$ eine Bijektion zwischen den Markoffoperatoren auf $\mathcal{M}$ und denen auf $L(\mathcal{M})$.

Eine analoge Aussage gilt für starke Markoffoperatoren.

Beweis: $L(\mathcal{M})$ ist eine Markoffalgebra in $\mathcal{M}'$, denn $L_t^{-1}L(\mathcal{M}) = LL_t(\mathcal{M}) \subset L(\mathcal{M})$.

Und $L: \mathcal{M} \longrightarrow L(\mathcal{M})$ ist eine Bijektion. Also folgt aus Satz 4.2 das Korollar.

Die Zustandsraumtransformation nun ist ein Spezialfall dieser allgemeinen Situation.

Sei $X = (\Omega, (X_t), (P^x), E_\Delta)$ ein Prozeß. Sei E' ein zweiter LKAB, $E'_\Delta = E' \sim \Delta'$ die übliche Kompaktifizierung, $\mathcal{L}'_\Delta$ die zu E'_Δ gehörige σ -Algebra.

Sei $\varphi: E \longrightarrow E'$ eine Abbildung, die durch $\varphi(\Delta) = \Delta'$ fortgesetzt sei zu $\varphi: E_\Delta \longrightarrow E'_\Delta$ und die folgenden Verträglichkeitsbedingungen genügt (siehe [4]):

- (a) φ ist eine Abbildung auf und bi-meßbar bezüglich $\mathcal{L}_\Delta, \mathcal{L}'_\Delta$.
- (b) Für $x, y \in E_\Delta$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$ ist $\varphi(X_t P^x) = \varphi(X_t P^y)$.

Aus X läßt sich ein Prozeß

$X' = (\Omega, (X'_t), (P'^{x'}), E'_\Delta)$ mit E' als Zustandsraum bilden durch

$$X'_t = \varphi(X_t); \quad P'^{x'} = \text{Res}_{F(X_t)} P^x, \text{ wo } x \in \varphi^{-1}(x') \text{ und } F(x) = \mathcal{O}(X'_t, t \in [0, \infty))$$

Wegen (b) ist $P'^{x'}$ wohldefiniert.

X' ist wieder ein stochastischer Prozeß, da φ bi-meßbar ist; man schreibt $X' = \varphi(X)$ und sagt, X' ist aus X durch Transformation des Zustandsraumes entstanden.

Sei W die Menge aller Abbildungen $w \in E_\Delta^{[0, \infty]}$ mit $\{s: w_s = \Delta\} = [a, \infty)$, analog W' ; sei $F = \mathcal{L}_\Delta^{[0, \infty)} \sim W$ und $F' = \mathcal{L}'_\Delta^{[0, \infty)} \sim W'$.

φ induziert eine Abbildung $\Phi: W \longrightarrow W'$ durch $\Phi((w_s)) = (\varphi(w_s))$.

ϕ ist $F - F'$ -meßbar, also ist $L: f \longrightarrow f \cdot \phi$ eine Abbildung $L: \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$; da φ eine Abbildung auf ist, ist L eine Injektion. L ist linear, multiplikativ, positiv, normiert, σ -stetig und $(Lf)(\Delta) = f(\phi(\Delta))$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}' & \xrightarrow{L} & \mathcal{M} \\ L_t \downarrow & & \downarrow L_t \\ \mathcal{M}' & \xrightarrow{L} & \mathcal{M} \end{array}$$

ist kommutativ.

Sei P der Operator zu X , P' der Operator zu X' ; dann ist $PL = LP'$ auf $\mathcal{M}'$ aufgrund der Verträglichkeit von φ . Da nun die Situation von Korollar 4.3 vorliegt, und auf $L(\mathcal{M}')$ $LP'L^{-1} = P$ gilt, so folgt der

Satz 4.4

- (1) P' ist genau dann ein Markoffoperator, wenn P ein Markoffoperator auf $L(\mathcal{M}')$ ist.
- (2) P' ist genau dann ein starker Markoffoperator, wenn P ein starker Markoffoperator auf $L(\mathcal{M}')$ ist.

Daraus folgt, als die eine Richtung der Äquivalenz

Korollar 4.5(DYNKIN)

- (1) Ist X ein Markoffprozeß, so ist $\varphi(X)$ ein Markoffprozeß.
- (2) Ist X ein rechtsseitig stetiger starker Markoffprozeß und ist φ noch zusätzlich stetig, so ist $\varphi(X)$ ein rechtsseitig stetiger starker Markoffprozeß.

Bemerkung Korollar 4.3 läßt sich auch dazu benutzen, eine von Rosenblatt bewiesene Verschärfung des Satzes von Dynkin (Korollar 4.5) herzuleiten.

§5. Arretierte Operatoren

Sei E ein LKAB, E_Δ die Kompaktifizierung und W die typische Menge aller rechtsseitig stetigen Abbildungen

$w: \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow E_\Delta$ mit $\{t: w_t = \Delta\} = [a, \infty]$.

Sei $\mathcal{M}$ wie früher der dazugehörige Funktionenraum und $\mathcal{T}$ die Menge der universellen Stoppzeiten. Sei $\mathcal{R}$ die Menge der reellen Funktionen auf W .

Zu jedem $T \in \mathcal{T}$ gehört eine Abbildung $L^T: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, definiert durch

$$(L^T f)(w) = f(w'), \quad \text{wo} \quad w'(t) = \begin{cases} s_\Delta T(w), & 0 \leq t < \infty \\ \Delta, & t = +\infty \end{cases}$$

$(f \in \mathcal{R}, w \in W)$.

Diese Definition ist auch sinnvoll für numerische, nicht - negative Funktionen anstelle von f .

Definition Eine (universelle) Stoppzeit T heißt terminale Stoppzeit, wenn gilt

$$T = t + T \circ \theta_t \quad \text{auf } [t < T]$$

und strikt terminale Stoppzeit, wenn sogar gilt

$$T = t + T \circ \theta_t \quad \text{auf } [t \leq T]$$

Die strikt terminalen Stoppzeiten lassen sich allein in Bezugnahme auf $\mathcal{T}$ und die dort erklärte Operation " $*$ " wie folgt charakterisieren.

Charakterisierung strikt terminaler Stoppzeiten:

$T \in \mathcal{T}$ ist genau dann eine strikt terminale Stoppzeit, wenn gilt $S * T = T$ für alle $S \in \mathcal{T}$ mit $S \leq T$.

Beweis: Ist T eine strikt terminale Stoppzeit, so ist klar, daß $S * T = T$ für $S \in \mathcal{T}$, $S \leq T$.

Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt, und sei $t \in R_+$.

Setze $S = t \cdot \chi_{[t \leq T]} + T \cdot \chi_{[T < t]}$.

Es ist $S \leq T$ und $S_{\wedge r} = t_{\wedge r} \cdot \chi_{[t \leq T]} + (T \wedge r) \cdot \chi_{[T < t]} \in \mathcal{M}_r$

weil für $t \leq r$ $S_{\wedge r} \in \mathcal{M}_t \subset \mathcal{M}_r$ und für $r < t$

$$S_{\wedge r} = r \cdot \chi_{[t \leq T]} + (T \wedge r) \cdot \chi_{[T < t]} = (T \wedge r) \cdot \chi_{[t \leq T]} + (T \wedge r) \cdot \chi_{[T < t]} = T \wedge r \in \mathcal{M}_r;$$

daher ist $S \in \mathcal{T}$.

Also ist

$$T = S * T = S + T \cdot \theta_S = t \cdot \chi_{[t \leq T]} + T \cdot \chi_{[T < t]} + \chi_{[t \leq T]} \cdot T \cdot \theta_t + \chi_{[T < t]} \cdot T \cdot \theta_T$$

Da speziell $T \leq T$ und daher $T = T + T \cdot \theta_T$, also $T \cdot \theta_T = 0$ dort, wo T endlich ist, so folgt

$$T = t \cdot \chi_{[t \leq T]} + T \cdot \chi_{[T < t]} + \chi_{[t \leq T]} \cdot T \cdot \theta_t$$

$$\text{d.h.} \quad \chi_{[t \leq T]} \cdot T = t \cdot \chi_{[t \leq T]} + \chi_{[t \leq T]} \cdot T \cdot \theta_t,$$

also $T = t + T \cdot \theta_t$ auf $[t \leq T]$.

Die Familie $(L^T)_{T \in \mathcal{T}}$ besteht aus multiplikativen Operatoren und hat folgende Eigenschaften.

Satz 5.1 Seien $S, T \in \mathcal{T}$, $t \in [0, \infty]$.

$$(1) \quad \mathcal{M}_t = L^t(\mathcal{M}) = \{f \in \mathcal{M} : L^t f = f\}$$

$$(2) \quad L^S(T) \wedge S = S \wedge T.$$

L^S und L^T sind vertauschbar, und es gilt

$$L^{S \wedge T} = L^S L^T$$

$$L^{S \vee T} = L^S + L^T - L^{S \wedge T}$$

Bezüglich der unter idempotenten Operatoren üblichen Ordnung ist $(L^T)_{T \in \tau}$ ein σ -vollständiger Verband, und $T \longrightarrow L^T$ ist ein Verbandshomomorphismus der σ -vollständigen Verbände τ und $(L^T)_{T \in \tau}$.

(3) Es ist $M_T^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} L^{T+\varepsilon}(M)$; speziell $L^T: M \longrightarrow M$.

(4) Über die Beziehungen zwischen den L^T und L_T gilt:

$$L^{T \wedge S} L_T f = L^{T \wedge S} (\chi_{[T < \infty]}) \cdot L_T L^S f + L^{T \wedge S} (\chi_{[T = \infty]}) \cdot L_\infty f$$

und falls S eine strikt terminale Stoppzeit ist

$$L^S L_T f = L^S (\chi_{[T < \infty]}) \cdot L_{S \wedge T} L^S f + L^S (\chi_{[T = \infty]}) \cdot L_\infty f$$

$(f \in \mathcal{R})$.

Ist speziell T eine endliche, und S eine strikt terminale Stoppzeit, so hat man die Vertauschungsrelationen

$$L_T L^S = L^{T \wedge S} L_T \quad \text{und} \quad L^S L_T = L_{S \wedge T} L^S.$$

(5) Für $S \in \tau$ ist $(L^S L_T)_{T \in \tau}$ eine Halbgruppe, d.h.

$$L^S L_{T \wedge U} = L^S L_T L^S L_U \quad (U \in \tau),$$

Die Operatoren L^S verhalten sich also wie starke Markoffoperatoren.

(6) Die Stoppzeiten lassen sich durch die Operatoren L^t charakterisieren:

Eine nicht - negative Funktion T auf W ist genau dann aus τ , wenn gilt

$$L^t(T \wedge t) = T \wedge t \quad \text{für alle } t \in \mathcal{B}, \infty].$$

Beweis:

(1) Für $t = +\infty$ ist die Behauptung trivial, da $L^\infty = \text{Identität}$ und $M_\infty = M$. Sei also $0 \leq t < +\infty$.

Es ist, wie man sofort sieht, $L^t L^t = L^t$, also L^t idempotent, und daher $L^t(M) = \{f \in M : L^t f = f\}$.

Sei $H = \{ f \in M_t : L^t f = f \}$; H ist ein Vektorraum, mit:

$f_n \in H_+$, $f_n \uparrow f$ beschränkt $\Rightarrow f \in H$.

Sei $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$, $f = g_1 \circ \pi_{t_1} \dots g_n \circ \pi_{t_n}$ ($g_i \in M_E$);

es ist $f \in M_t$ und

$$L^t f = L^t(g_1 \circ \pi_{t_1}) \dots L^t(g_n \circ \pi_{t_n}) = g_1 \circ \pi_{t_1 \wedge t} \dots g_n \circ \pi_{t_n \wedge t} = f.$$

Nach einem Standardschluß (siehe [1]) ist dann $H = M_t$,

also $M_t \subset L^t(M)$.

Ebenso beweist man die andere Inklusion, indem man das Verfahren auf den Vektorraum $H = \{ f \in M : L^t f \in M_t \}$ anwendet.

(2)

(a) Sei $t \in R_+$, $T \in \mathcal{T}$. Dann ist $T \wedge t \in M_t$, also nach (1)

$L^t(T \wedge t) = T \wedge t$, also $L^t(T) \wedge t = T \wedge t$; das ist auch richtig für $t = +\infty$.

Sei nun $S \in \mathcal{T}$, $w \in W$, $t = S(w)$.

Es ist $L^t(T)(w) \wedge t = T(w) \wedge t$; da $L^S(T)(w) = L^{S(w)}(T)(w)$, so

$L^S(T)(w) \wedge S(w) = T(w) \wedge S(w)$, also $L^S(T) \wedge S = T \wedge S$.

(b) Sei $f \in \mathcal{K}$, $w \in W$; es ist

$$\begin{aligned} (L^{S \wedge T} f)(w) &= (L^T f)(w'), & \text{wo} & \quad w'(t) = \begin{cases} w(t \wedge S(w)) & , t < \infty \\ \Delta & , t = \infty \end{cases} \\ &= f(w'') & , & \quad \text{wo} & \quad w''(s) = \begin{cases} w'(s \wedge T(w')) & , s < \infty \\ \Delta & , s = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen (a) ist $w''(s) = \begin{cases} w(s \wedge T(w) \wedge S(w)) & , s < \infty \\ \Delta & , s = \infty \end{cases}$

also $(L^{S \wedge T} f)(w) = (L^{S \wedge T} f)(w)$.

Es ist $L^{S \vee T} f = \chi_{[S \leq T]} L^T f + \chi_{[T < S]} L^S f$,

und wegen des eben Gezeigten

$$L^T f = L^{S \vee T} L^T f = \chi_{[S \leq T]} L^T f + \chi_{[T < S]} L^{S \wedge T} f$$

$$L^S f = L^{S \vee T} L^S f = \chi_{[S \leq T]} L^{S \wedge T} f + \chi_{[T < S]} L^S f$$

und daher $L^S f + L^T f = L^{S \wedge T} f + \chi_{[S \leq T]} L^T f + \chi_{[T < S]} L^S f = L^{S \wedge T} f + L^{S \vee T} f$.

(c) Für L^S und L^T sei

$$L^S < L^T \text{ genau dann, wenn } L^S L^T = L^S.$$

"<" ist eine Ordnung auf $(L^T)_{T \in \mathcal{T}}$; L^0 ist das kleinste, L^∞ das größte Element bezüglich "<".

Es ist $L^{S \wedge T} < L^S, L^T$ und ist

$L^R < L^S, L^T$ für ein $R \in \mathcal{T}$, so $L^S L^R = L^R$, $L^T L^R = L^R$, also $L^{S \wedge T} L^R = L^R$, also $L^R < L^{S \wedge T}$, und daher $L^{S \wedge T} = L^S \wedge L^T$,

wenn " $\wedge$ " das Infimum bezüglich "<" bezeichnet.

Ebenso folgt für das Supremum (" $\vee$ ") $L^{S \vee T} = L^S \vee L^T$.

Ist $(T_n)_{n=1,2,\dots}$ eine Folge aus $\mathcal{T}$, so ist $T = \sup_n T_n \in \mathcal{T}$

$$\text{und } L^{\sup_n T_n} = \bigvee_n L^{T_n}.$$

(3) Sei $T \in \mathcal{T}$ und

$$T_n(w) = \begin{cases} +\infty & , T(w) = +\infty \\ \frac{j+1}{2^n} & , \frac{j}{2^n} \leq T(w) < \frac{j+1}{2^n} ; j=0,1,\dots \end{cases}$$

die übliche Approximation von Stoppzeiten durch Stoppzeiten T_n mit $T_n \downarrow T$ (siehe [1]).

Sei $A \in \mathcal{F}_T^+$; es ist

$$L^{T_n} \chi_A = \sum_j \chi_{[T_n = \frac{j+1}{2^n}]} \cdot L^{\frac{j+1}{2^n}} \chi_A \quad (\text{inklusive } j=+\infty)$$

Da $[\frac{j}{2^n} \leq T] \cap [T < \frac{j+1}{2^n}] \wedge A \in \mathcal{F}_{\frac{j+1}{2^n}}$ ist, so folgt nach (1)

$$\chi_{[T_n = \frac{j+1}{2^n}]} \cdot L^{\frac{j+1}{2^n}} \chi_A = L^{\frac{j+1}{2^n}} (\chi_{[T_n = \frac{j+1}{2^n}]} \cdot \chi_A) = \chi_{[T_n = \frac{j+1}{2^n}]} \cdot \chi_A$$

$$\text{und daher } L^{T_n} \chi_A = \sum_j \chi_{[T_n = \frac{j+1}{2^n}]} \cdot \chi_A = \chi_A ;$$

durch Approximation folgt $L^{T_n} f = f$ für alle $f \in \mathcal{M}_T^+$,
also $\mathcal{M}_T^+ \subset L^{T_n}(\mathcal{M})$ für alle n .

Sei $\varepsilon > 0$; wähle n so, daß $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ ist;

dann ist

$$\begin{aligned} T + \varepsilon &= \sum_j (T + \varepsilon) \cdot \chi_{\left[\frac{j}{2^n} \leq T < \frac{j+1}{2^n}\right]} + \infty \cdot \chi_{[T = +\infty]} \\ &= \sum_j \left(\frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \chi_{\left[\frac{j}{2^n} \leq T < \frac{j+1}{2^n}\right]} + \infty \cdot \chi_{[T = +\infty]} \\ &\geq T_n. \end{aligned}$$

Sei $f \in \mathcal{M}_T^+$, dann $L^{T+\varepsilon} f = L^{T+\varepsilon} L^{T_n} f = L^{T_n} f = f$, also

$$\mathcal{M}_T^+ \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} L^{T+\varepsilon}(\mathcal{M}).$$

Umgekehrt: Sei $S \in \mathcal{T}$, $\chi_A \in \mathcal{M}$.

$$L^t(L^S \chi_A \cdot \chi_{[S < t]}) = L^{t \wedge S}(\chi_A) \cdot \chi_{[S < t]} = L^S \chi_A \cdot \chi_{[S < t]},$$

also nach (1) $L^S \chi_A \cdot \chi_{[S < t]} \in \mathcal{M}_t$ für alle t , also

$L^S \chi_A \in \mathcal{M}_S^+$; daher stets $L^S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_S^+$ für jedes $S \in \mathcal{T}$.

Damit $L^{T+\varepsilon}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_{T+\varepsilon}^+$, und

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} L^{T+\varepsilon}(\mathcal{M}) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{M}_{T+\varepsilon}^+ = \mathcal{M}_T^+.$$

Somit $\mathcal{M}_T^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} L^{T+\varepsilon}(\mathcal{M})$.

(4)

(a) Für $f \in \mathcal{R}$, $w \in W$ ist

$$(L_T L^S f)(w) = (L^S f)(w')$$

mit $w'(t) = w(t+T(w))$ für $0 \leq t \leq +\infty$

$$= f(w'')$$

mit $w''(s) = \begin{cases} w'(s \wedge S(w')), & 0 \leq s < +\infty \\ \Delta, & s = +\infty \end{cases}$

Für $0 \leq s < \infty$ ist

$$\begin{aligned} w''(s) &= w'(s \wedge S(w')) = w(s \wedge L_T(S)(w) + T(w)) = w((s+T(w)) \wedge (T(w) + L_T(S)(w))) \\ &= w((s+T(w)) \wedge (T \circ S)(w)). \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} (L^{T \circ S} L_T f)(w) &= (L_T f)(\bar{w}), \quad \text{mit } \bar{w}(t) = \begin{cases} w(t \wedge (T \circ S)(w)), & 0 \leq t < \infty \\ \Delta, & t = \infty \end{cases} \\ &= f(\bar{\bar{w}}) \quad \text{mit } \bar{\bar{w}}(s) = \bar{w}(s+T(\bar{w})) \text{ für } 0 \leq s < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\bar{\bar{w}}(s) = \begin{cases} w((s+T(\bar{w})) \wedge (T \circ S)(w)), & 0 \leq s < \infty \text{ und } T(\bar{w}) < \infty \\ \Delta, & s = \infty \text{ oder } T(\bar{w}) = \infty \end{cases}$$

Für $0 \leq s < \infty$ und $L^{T \circ S}(T)(w) < \infty$ ist

$$\bar{\bar{w}}(s) = w((s+L^{T \circ S}(T)) \wedge (T \circ S)(w)).$$

Nach (2) ist

$$(s+L^{T \circ S}(T)) \wedge (T \circ S) = L^{T \circ S}(s+T)(T \circ S) = (s+T) \wedge (T \circ S),$$

also

$$\bar{\bar{w}}(s) = w((s+T(w)) \wedge (T \circ S)(w)) \quad \text{für } 0 \leq s < \infty \text{ und } L^{T \circ S}(T)(w) < \infty.$$

$$\text{Ist also } L^{T \circ S}(T)(w) < \infty, \text{ so } (L^{T \circ S} L_T f)(w) = (L_T L^S f)(w).$$

$$\text{Ist } L^{T \circ S}(T)(w) = \infty, \text{ so } (L^{T \circ S} L_T f)(w) = (L_\infty f)(w).$$

$$\text{Daher } L^{T \circ S} L_T f = L^{T \circ S}(\chi_{[T < \infty]}) L_T L^S f + L^{T \circ S}(\chi_{[T = \infty]}) \cdot L_\infty f.$$

(b) Sei S eine strikt terminale Stoppzeit.

$$(L^S L_T f)(w) = (L_T f)(w') \quad \text{mit } w'(t) = \begin{cases} w(t \wedge S(w)), & 0 \leq t < \infty \\ \Delta, & t = \infty \end{cases}$$

$$= f(w'') \quad \text{mit } w''(s) = w'(s+T(w'))$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad w''(s) &= \begin{cases} w((s+L^S(T)(w)) \wedge S(w)), & 0 \leq s \text{ und } L^S(T)(w) < \infty \\ \Delta, & s = \infty \text{ oder } L^S(T)(w) = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Da nach (2) $(s + L^S(T)) \wedge S = L^S(s + T) \wedge S = (s + T) \wedge S$ ist, so

$$w''(s) = \begin{cases} w((s + T(w)) \wedge S(w)), & 0 \leq s < \infty \text{ und } L^S(T)(w) < \infty \\ \Delta, & s = \infty \text{ oder } L^S(T)(w) = \infty \end{cases}$$

Und

$$\begin{aligned} (L_{S \wedge T} L^S f)(w) &= (L^S f)(\bar{w}) & \text{mit } \bar{w}(t) &= w(t + (S \wedge T)(w)), \quad 0 \leq t < \infty \\ &= f(\bar{w}) & \text{mit } \bar{w}(s) &= \begin{cases} \bar{w}(S \wedge S(\bar{w})), & 0 \leq s < \infty \\ , & s = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Für $0 \leq s < \infty$ ist

$$\begin{aligned} \bar{w}(s) &= w(S \wedge L_{S \wedge T}(S)(w) + (S \wedge T)(w)) = w((s + S \wedge T(w)) \wedge ((S \wedge T) * S)(w)) \\ &= w((s + S(w)) \wedge (s + T(w)) \wedge ((S \wedge T) * S)(w)). \end{aligned}$$

Da S strikte terminale Stoppzeit, so $(S \wedge T) * S = S$, also

$$\bar{w}(s) = w((s + T(w)) \wedge S(w)) \text{ für } 0 \leq s < \infty.$$

Wenn $L^S(T)(w) < \infty$, so also $(L^S L_T f)(w) = (L_{S \wedge T} L^S f)(w)$.

Ist $L^S(T)(w) = \infty$, so $(L^S L_T f)(w) = (L_\infty f)(w)$.

$$\text{Daher } L^S L_T f = L^S(\chi_{[T < \infty]}) \cdot L_{S \wedge T} L^S f + L^S(\chi_{[T = \infty]}) \cdot L_\infty f.$$

(5) Seien $S, T \in \mathcal{T}$, $f \in \mathcal{M}$. Nach (4) ist

$$L^S L_T (L^S f) = L^S(\chi_{[T < \infty]}) \cdot L_{S \wedge T} L^S f + L^S(\chi_{[T = \infty]}) \cdot L_\infty L^S f.$$

Nun ist $L_\infty L^S f = (L^S f)(\Delta) = f(\Delta) = L_\infty f$, also

$$L^S L_T (L^S f) = L^S L_T f, \text{ d.h. } L^S L_T L^S = L^S L_T.$$

Ist $U \in \mathcal{T}$, so auch $L^S L_T L^S L_U = L^S L_T L_U = L^S L_{T * U}$.

(6) Nach Definition ist eine nicht-negative, numerische Funktion T aus $\mathcal{T}$ genau dann, wenn $T \wedge t \in \mathcal{M}_t$ für alle t , nach (1) also genau dann, wenn $L^t(T \wedge t) = T \wedge t$.

Damit ist Satz 5.1 bewiesen.

Aus Eigenschaft (3) von Satz 5.1 ergibt sich ein einfacher Beweis des Satzes von Blumenthal und Gettoor ([2]). Für einen starken Markoffoperator folgt nämlich sogar

Satz 5.2 Ist P ein starker Markoffoperator, $T \in \mathcal{T}(P)$, so ist

$$\overline{m}_T^+ = L^T(\overline{m})$$

Beweis: Aus (3) von Satz 5.1 folgt sofort

$$\overline{m}_T^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} L^{T+\varepsilon}(\overline{m}) \quad \text{für } T \in \mathcal{T}(P).$$

Da P ein starker Markoffoperator ist, ist der zu P gehörige Prozeß ein starker Markoffprozeß, und daher gilt (siehe [1])

$$\overline{m}_t^+ = \bigcap_{s > t} \overline{m}_s = \overline{m}_t.$$

Da P ein schwacher Markoffoperator ist, so folgt aus Satz 5.1, daß auch $\overline{m}_t = L^t(\overline{m})$ ist.

$$\text{Also } L^t(\overline{m}) = \bigcap_{s > t} L^s(\overline{m}).$$

Nun ist $L^T(\overline{m}) \subset L^{T+\varepsilon}(\overline{m})$ für alle $\varepsilon > 0$, da mit

$$L^T f = f \text{ auch } L^{T+\varepsilon} f = L^{T+\varepsilon} L^T f = L^T f = f \text{ ist.}$$

Sei andererseits $f \in \overline{m}_T^+$; dann ist auch $\chi_{[T=t]} \cdot f \in \overline{m}_T^+$

und daher jedenfalls $L^{T+\varepsilon}(\chi_{[T=t]} f) = \chi_{[T=t]} f$ für alle $\varepsilon > 0$.

$$\text{Es folgt } \chi_{[T=t]} L^{T+\varepsilon}(\chi_{[T=t]} f) = \chi_{[T=t]} f$$

$$\chi_{[T=t]} L^{t+\varepsilon}(\chi_{[T=t]} f) = \chi_{[T=t]} f.$$

Da $\chi_{[T=t]} \in \overline{m}_{t+\varepsilon}$, so $L^{t+\varepsilon}(\chi_{[T=t]} f) = \chi_{[T=t]} f$ für alle $\varepsilon > 0$,

also $\chi_{[T=t]} f \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L^{t+\varepsilon}(\overline{m}) = L^t(\overline{m})$, d.h. $L^t(\chi_{[T=t]} f) = \chi_{[T=t]} f$.

Da dies für alle $f \in \overline{M}_T^+$ gilt, so speziell für die Funktion 1, also $L^T(\chi_{[T=t]}) = \chi_{[T=t]}$, und daher $\chi_{[T=t]} \cdot L^T f = \chi_{[T=t]} \cdot f$ für alle $t \geq 0$.

Ist $w \in W$, $T(w) = t$, so folgt $(L^T f)(w) = f(w)$, also $L^T f = f$ und damit $\overline{M}_T^+ = L^T(\overline{M})$.

Definition Ein Operator P heißt arretiert bezüglich $T \in \mathcal{T}(P)$, wenn gilt

$$PL^T = P.$$

Jeder Operator ist arretiert bezüglich $+\infty$.

Es gilt

Satz 5.3 Sei P ein Operator, T eine strikt terminale Stoppzeit mit $L^T(T) = T$, und $Q = PL^T$ der bezüglich T arretierte Operator P . Es ist Q genau dann ein starker Markoffoperator, wenn gilt

$$PL_{T_1 \wedge T_2} f = PL_{T_1} PL_{T_2} f \quad \text{für alle } f \in L^T(M) \text{ und alle Stoppzeiten } T_1, T_2$$

Beweis: Gilt $QL_{S \wedge T} = QL_{S \wedge T} Q$ für alle Stoppzeiten S , so ist Q ein starker Markoffoperator, denn:

$$QL_{S \wedge T} L^T f = QL_{S \wedge T} Q f \quad \text{und} \quad Q(L^T(\chi_{[S=\infty]}) L_T L^T f) = Q(L^T \chi_{[S=\infty]} \cdot L_T Q f)$$

und daher durch Subtraktion unter Beachtung von $L^T(S) \wedge T = S \wedge T$ $Q(L^T \chi_{[S < \infty]} \cdot L_{S \wedge T} L^T f) = Q(L^T \chi_{[S < \infty]} \cdot L_{S \wedge T} Q f)$.

Wegen Satz 5.1 folgt daher $QL_S f = QL_S Q f$.

Also ist Q genau dann ein starker Markoffoperator, wenn gilt

$$PL_{T_1 \wedge T_2} L_{T_2 \wedge T}^T = PL_{T_1 \wedge T} PL_{T_2 \wedge T}^T \quad \text{für alle } T_1.$$

Wegen $L^T(T) = T$ folgt aus Satz 5.1 (4) $L^T L_{T_1 \wedge T} = L_{T_1 \wedge T} L^T$,

also Q genau dann ein starker Markoffoperator, wenn gilt

$$PL_{T_1 \wedge T} L_{T_2 \wedge T}^T = PL_{T_1 \wedge T} PL_{T_2 \wedge T}^T; \text{ daraus folgt die Behauptung.}$$

Da für einen starken Markoffoperator $L^T(T) = T$ wegen Satz 5.2, so folgt Korollar 5.4 (DYNKIN)

Ist P ein starker Markoffoperator, T eine strikt terminale Stoppzeit, so ist der arretierte Operator PL^T wieder ein starker Markoffoperator.

Bemerkung Im allgemeinen ist ein bezüglich $T \in \mathcal{T}(P)$ arretierter Operator nur ein erweiterter Operator; der Einfachheit halber soll aber auch dort von Operatoren gesprochen werden.

Lemma 5.5 Sei $S \in \mathcal{T}(P)$, P ein starker, normaler Markoff-operator, bezüglich S arretiert. Dann ist

$$\chi_{[S=0]} \cdot P = \chi_{[S=0]} L^0.$$

Ist S zusätzlich noch eine strikt terminale Stoppzeit, so

$$L_S P = L_S L^0$$

Beweis: Es ist

$$\chi_{[S=0]} \cdot P f = P(\chi_{[S=0]} \cdot L^0 f) = P(\chi_{[S=0]} \cdot L^0 f) = \chi_{[S=0]} \cdot L^0 f.$$

Ist S strikt terminale Stoppzeit, so $L_S(S) = 0$ dort, wo S endlich ist. Aus obigem folgt

$$\chi_{[S<\infty]} \cdot L_S(\chi_{[S=0]}) \cdot L_S P f = \chi_{[S<\infty]} \cdot L_S(\chi_{[S=0]}) \cdot L_S L^0 f,$$

$$\text{also } \chi_{[S<\infty]} \cdot L_S P f = \chi_{[S<\infty]} \cdot L_S L^0 f.$$

Da trivialerweise

$$\chi_{[S=\infty]} \cdot L_S P f = \chi_{[S=\infty]} \cdot L_S L^0 f \text{ gilt,}$$

folgt die Behauptung.

Die in Satz 5.1 auf $(L_T)_{T \in \mathcal{T}}$ definierte Ordnung induziert eine Halbordnung auf $\mathcal{P}$ vermöge:

Für $P, Q \in \mathcal{P}$ sei $P < Q$ genau dann, wenn: $Q L^T = Q \Rightarrow P L^T = P \quad (T \in \mathcal{T})$.

Für Elemente L_T ist diese Halbordnung mit der früher definierten Ordnung identisch. Daß auf $\mathcal{P}$ eine Halbordnung definiert wird, ist klar.

Satz 5.6 Sind P und Q zwei bezüglich S bzw. T aus $\mathcal{T}$ arretierte starke Markoffoperatoren, so existiert das Supremum (und das Infimum) von P und Q in $\mathcal{P}$, wenn

$$P L^{S \wedge T} = Q L^{S \wedge T} \quad (*).$$

Es ist dann $P \vee Q = P + Q - P L^{S \wedge T} = P + Q - Q L^{S \wedge T}$ und $P \vee Q$ ist bezüglich $S \vee T$ arretiert. $P \vee Q$ bezüglich S arretiert ergibt P , bezüglich T arretiert Q .

Beweis:

(1) Sei $R = P + Q - PL^{S \wedge T}$.

Es ist $P(\chi_{[T < S]} f) + Q(\chi_{[S \leq T]} f) = Pf + Qf - P(\chi_{[T=S]} f) - Q(\chi_{[S > T]} f)$.

Da $\chi_{[T=S]} \in (\overline{m}_S^+ \cap \overline{m}_T^+)_P$, $\chi_{[S > T]} \in (\overline{m}_S^+ \cap \overline{m}_T^+)_Q$,

so folgt nach Satz 5.2 $L^{S \wedge T} \chi_{[T \geq S]} = \chi_{[T \geq S]}$, $L^{S \wedge T} \chi_{[S > T]} = \chi_{[S > T]}$,

also $PL^{S \wedge T}(\chi_{[T \geq S]} f) = P(\chi_{[T \geq S]} L^{S \wedge T} f) = P(\chi_{[T \geq S]} L^S f) = P(\chi_{[T \geq S]} f)$.

Analog für Q.

Damit

$$Rf = P(\chi_{[T < S]} f) + Q(\chi_{[S \leq T]} f) + PL^{S \wedge T}(\chi_{[T \geq S]} f) + QL^{S \wedge T}(\chi_{[S < T]} f) - PL^{S \wedge T} f.$$

und wegen (*) $Rf = P(\chi_{[T < S]} f) + Q(\chi_{[S \leq T]} f)$.

Also ist R ein positiver, normaler Operator, mithin in $\mathcal{P}$.

(2) Es ist $P < R$, denn:

$$RL^U = R \Rightarrow RL^{U \wedge S} = RL^S \Rightarrow RL^S L^U = RL^S \Rightarrow PL^U = P.$$

Ebenso $Q < R$.

Sei $R' \in \mathcal{P}$ mit $P, Q < R'$. Zu zeigen ist noch $R < R'$.

Sei $R' L^U = R'$; dann ist $PL^U = P$, $QL^U = Q$, und daher

$$PL^{S \wedge T} L^U = PL^U L^{S \wedge T} = PL^{S \wedge T}.$$

Also

$$RL^U = PL^U + QL^U - PL^{S \wedge T} L^U = P + Q - PL^{S \wedge T} = R; \text{ also } R < R'.$$

Definition (siehe [3])

Sind P und Q zwei Operatoren, arretiert bezüglich S bzw. T, so heißt ein Operator R mit

$$RL^S = P, \quad RL^T = Q$$

ein Recollement von P und Q.

Korollar 5.7 Sind P, Q zwei bezüglich S, T arretierte starke Markoffoperatoren, so existiert genau dann ein Recollement, wenn gilt

$$PL^{S \wedge T} = QL^{S \wedge T} \quad (*).$$

Ist $(*)$ erfüllt, so ist $P \vee Q$ ein Recollement von P und Q und $P \vee Q$ ist das kleinste mögliche Recollement von P und Q .

Beweis: Existiert zu P und Q ein Recollement R , so

$$RL^{S \wedge T} = PL^{S \wedge T}, \quad RL^{T \wedge S} = QL^{S \wedge T}, \text{ also } PL^{S \wedge T} = QL^{S \wedge T}.$$

Ist umgekehrt $(*)$ erfüllt, so existiert nach Satz 5.6 $P \vee Q$ und $P \vee Q$ ist ein Recollement von P und Q .

Sei R ein Recollement zu P und Q und sei $RL^U = R$.

$$\text{Da } P \vee Q = P + Q - PL^{S \wedge T} = RL^S + RL^T - RL^{S \wedge T} = RL^{S \vee T}, \text{ so}$$

$$(P \vee Q)L^U = RL^{S \vee T}L^U = RL^UL^{S \vee T} = RL^{S \vee T} = P \vee Q, \text{ also}$$

$P \vee Q < R$, also $P \vee Q$ kleinstes Recollement.

In der Theorie der Recollements ([3]) stellt man sich die Frage, ob zu zwei arretierten starken Markoffoperatoren ein stark Markoffsches Recollement existiert. Speziell kann man sich fragen, ob das minimale Recollement, das wie das obige Korollar zeigt, eine einfache Gestalt hat, stark Markoffsch ist.

Im allgemeinen scheint dies nicht richtig zu sein.

Satz 5.3, weiter unten, zeigt, daß es aber in speziellen Fällen richtig ist. Und zwar ist dort das minimale Recollement das einzig mögliche stark Markoffsche Recollement.

Der Beweis des Satzes benutzt den folgenden Begriff.

Definition Zwei Stoppzeiten S, T heißen orthogonal, wenn

$$S * T = T * S \quad \text{und} \quad S \wedge T = 0 \text{ gilt.}$$

Beispiel Handelt es sich um einen Prozeß mit stetigen Pfaden und sind U, V zwei offene, disjunkte Mengen, so sind die Austrittszeiten σ_U, σ_V aus diesen Mengen orthogonal, wie man sich leicht überzeugt. Außerdem sind diese Stoppzeiten strikt terminal.

Lemma 5.8 Sind S, T zwei orthogonale Stoppzeiten, und ist S terminal, so sind $U \wedge S$ und T wieder orthogonale Stoppzeiten für alle Stoppzeiten U .

Beweis: Es ist $S \wedge T \wedge U = 0$. Zu zeigen ist

$$U \wedge S + T \circ \theta_{U \wedge S} = T + (U \wedge S) \circ \theta_T \quad (*).$$

(a) Sei $(U \wedge S)(w) = 0$. Es steht links in (*) $T(w)$; ist noch $S(w)=0$, so ist wegen $S * T = T * S$, $S \circ \theta_T(w)=0$, also steht rechts in (*) $T(w)$; ist $S(w) > 0$, so $T(w)=0$ und rechts steht $(U \wedge S)(w)=0$.

(b) Sei $(U \wedge S)(w) > 0$. Ist $U(w) \geq S(w)$, so $S(w) > 0$, also $T(w)=0$, daher $T \circ \theta_S(w)=0$ wegen $T * S = S * T$, und auf der linken Seite von (*) steht $S(w)$, wie auf der rechten.
Ist $U(w) < S(w)$, so ebenfalls $S(w) > 0$, also $T(w)=0$. Da S terminal ist, so $S(w) = U(w) + S \circ \theta_U(w)$, also $S \circ \theta_U(w) > 0$; da $S \wedge T = 0$, so $T \circ \theta_U(w)=0$; daher steht links und rechts in (*) $U(w)$.
Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun der angekündigte

Satz 5.9 Sind S, T zwei strikt terminale, orthogonale Stoppzeiten und P, Q zwei bezüglich S bzw. T arretierte normale starke Markoffoperatoren, so gibt es genau ein bezüglich $S \vee T$ arretiertes stark Markoffsches Recollement, und zwar ist dies $P \vee Q$.

Beweis:

(1) Da $S \wedge T = 0$, und $PL^0 = QL^0 = L^0$, so existiert nach Satz 5.6 das Supremum $R \equiv P \vee Q = P + Q - L^0$.

Es ist $\ker R = \ker PL_T \cap \ker QL_S$, denn:

Ist $Rf=0$, so $Pf+Qf=L^0f$. Nach Lemma 5.5 ist $L_S P=L_S L^0$, $L_T Q=L_T L^0$.
Daher $L_T Pf=0$, also $PL_T f=PL_T Pf=0$. Ebenso $QL_S f=0$.

Umgekehrt: Ist $PL_T f=0$, so $P(\chi_{[S>0]} L_T f)=0$, daher

$$\chi_{[S>0]} Pf = P(\chi_{[S>0]} f) = P(\chi_{[S>0]} L_T f) = 0 \text{ da } SA=T=0.$$

Ebenso folgt aus $QL_S f=0$, daß $\chi_{[T>0]} Qf=0$ ist,
und

$$0 = \chi_{[T=0]} PL_T f = \chi_{[T=0]} P(\chi_{[T=0]} L_T f) = \chi_{[T=0]} Pf, \text{ also}$$

$$\chi_{[S=0]} \cdot \chi_{[T=0]} L^0 f = \chi_{[T=0]} \cdot \chi_{[S=0]} Pf = 0.$$

Daher

$$\begin{aligned} Rf &= \chi_{[S>0]} Pf + \chi_{[T>0]} Qf + \chi_{[S=0]} Pf + \chi_{[T=0]} Qf - L^0 f \\ &= \chi_{[S=0]} Pf + \chi_{[T=0]} Qf - L^0 f = -\chi_{[S=0]} \cdot \chi_{[T=0]} L^0 f = 0. \end{aligned}$$

(2) Für eine Stoppzeit U gilt die Vertauschungsrelation

$$L^S L_T L_U = L^S L_T L_U L_T.$$

Denn: Sei $f \in \mathcal{M}$; o.B.d.A. sei $f(\Delta) = 0$.

Nach Satz 5.1 (4) ist

$$L^S L_U f = L^S (\chi_{[U<\infty]}) \cdot L_{SAU} L^S f.$$

Nach Satz 5.1 (5) ist

$$\begin{aligned} L^S L_T L_U f &= L^S L_T L^S L_U f = L^S L_T L^S (\chi_{[U<\infty]}) \cdot L^S L_T L_{SAU} L^S f \\ &= L^S L_T L^S (\chi_{[U<\infty]}) \cdot L^S L_T L_{SAU} f \\ &= L^S L_T L^S (\chi_{[U<\infty]}) \cdot L^S L_T L_T L_{SAU} f, \end{aligned}$$

da T strikt terminal ist, und daher $T \circ T = T$, also $L_T L_T = L_T$ gilt.

Nach Lemma 5.8 sind $U \wedge S$ und T orthogonale Stoppzeiten, also
 $(U \wedge S) \circ T = T \circ (U \wedge S)$, d.h. L_T und L_{SAU} sind vertauschbar.

Damit

$$\begin{aligned} L^S_{L_T L_U} f &= L^S_{L_T} L^S(\chi_{[U < \infty]}) \cdot L^S_{L_T L_{S \wedge U}} L_T f \\ &= L^S_{L_T} L^S(\chi_{[U < \infty]}) \cdot L^S_{L_T L_{S \wedge U}} L^S L_T f \quad (\text{nach Satz 5.1 (5)}) \\ &= L^S_{L_T} (L^S(\chi_{[U < \infty]}) \cdot L_{S \wedge U} L^S L_T f). \end{aligned}$$

Da $f((A))=0$, so $(L_T f)((A))=f((A))=0$, also $L_{\infty} L_T f=0$,
und daher nach Satz 5.1 (4)

$$L^S_{L_U}(L_T f) = L^S(\chi_{[U < \infty]}) \cdot L_{S \wedge U} L^S L_T f, \text{ also}$$

$$L^S_{L_T L_U} f = L^S_{L_T} (L^S_{L_U} L_T f) = L^S_{L_T} L_U L_T f \quad \text{nach Satz 5.1 (5).}$$

(3) Das Recollement $R = P \vee Q$ ist stark Markoffsch, denn:
Da P, Q, L^0 normal sind, so ist R normal, speziell $RR=R$, also
 R idempotent. Nach Korollar 3.7 genügt es zu zeigen, daß
 $\ker R$ invariant ist gegen L_U , wo U eine Stoppzeit ist.
Sei also $Rf=0$; nach Schritt (1) ist dann $PL_T f = QL_S f = 0$;
Nach Schritt (2) ist, da P bezüglich S arretiert ist
 $PL_T L_U f = PL^S_{L_T} L_U f = PL_T L_U L_T f = PL_T PL_U L_T f = PL_T PL_U PL_T f = 0$.

Ebenso folgt $QL_S L_U f = 0$. Nach Schritt (1) ist daher $L_U f \in \ker R$.

(4) Sei R' ein weiteres normales Recollement von P und Q ,
arretiert bezüglich $S \vee T$. Es ist $R' L^S = P$, $R' L^T = Q$ und

$$R' = R' L^{S \vee T} = R' L^S + R' L^T - R' L^0 = P + Q - L^0 = R.$$

Beispiel Seien X, Y zwei starke normale Markoffprozesse mit
stetigen Pfaden, U, V zwei offene, disjunkte Mengen und
 X arretiert in U (d.h., der Operator arretiert bezüglich σ_U),
 Y arretiert in V . Dann gibt es genau einen normalen starken
Markoffprozeß mit stetigen Pfaden Z arretiert in $U \cup V$, derart,
daß Z arretiert auf U X ergibt und arretiert auf V Y .

Der zu Z gehörige Operator R hat die Gestalt $R = P + Q - L^0$, wo P der zu X gehörige, Q der zu Y gehörige Operator ist. Dies folgt aus Satz 5.9, da im Falle stetiger Pfade σ_U, σ_V zwei orthogonale Stoppzeiten sind, und außerdem strikt terminal.

Bemerkung Der Zusammenhang zwischen dem hier Vorgetragenen und [3] ist der, daß in [3] beliebige Recollements bezüglich Austrittszeiten und hier minimale Recollements bezüglich etwas allgemeinerer Stoppzeiten untersucht werden. Leider, und sehr wahrscheinlich, sind minimale Recollements nicht immer (vermutlich jedoch bei stetigen Pfaden) stark Markoffsch, dafür hat man aber den Vorteil, minimale Recollements explizit angeben zu können.

Literatur

- [1] Bauer, H. Markoffsche Prozesse.
Vorlesungsausarbeitung. Hamburg 1964.
- [2] Blumenthal, R.M. A theorem on stopping times
und Ann. Math. Statistics. 35 (1964)
Getoor, R.K.
- [3] Courrège, Ph. Temps d'arrêt d'une fonction aleatoire.
und Relation d'équivalence associées
Priouret, P. et propriétés de décomposition.
- " Recollements de processus de Markov.
- Beides in
Publication de l'Institut de Statistique
de l'Université de Paris.
Vol. XIV. Fasc. 3. 1965.
- [4] Dynkin, E.B. Markov processes. Vol. I.
Springer Verlag 1965.
- [5] Feller, W. Non - Markovian processes with the
semigroup property.
Ann. Math. Statistics. 30 (1959)
- [6] Getoor, R.K. Additive functionals of a Markov Process.
Vorlesungsausarbeitung. Hamburg 1964.
- [7] Krause, U. Stochastische Prozesse mit
abgeschwächter Markoffeigenschaft.
Unveröffentlicht. 1965.

Literatur

- [8] Meyer, P.A. Fonctionnelles multiplicatives
 et additives de Markov.
 Ann. Fourier . Tome XII . 1962.
- [9] Rosenblatt, M. Functions of Markov processes.
 Zeitschrift f. Wahrscheinlichkeitstheorie
 Bd. 5 (1966).
- [10] Shu - Teh Chen Moy Characterisations of conditional
 expectation as a transformation on
 function spaces.
 Pac. Journal of Math. 4.(1954)

Lebenslauf

Am 13. November 1940 in Berlin geboren, als Sohn des kaufmännischen Angestellten Karl Ludwig Krause und seiner Ehefrau Ruth, geb. Poster. Bis 1955 Besuch der Grundschule zu Löderburg (Kreis Staßfurt). Von 1955 bis 1960 Besuch der Neuen Oberschule in Braunschweig. Beginn des Studiums von Mathematik, Physik, Philosophie im Sommersemester 1960 an der Universität Göttingen. Vorlesungen bei Herrn Prof. H. Grauert und Herrn Prof. K. Reidemeister. Im Sommersemester 1961 Immatrikulation an der Universität Hamburg für diesselben Fächer, Vorlesungen bei Herrn Prof. H. Bauer, Frau Prof. H. Braun, Herrn Prof. E. Artin und Herrn Prof. C.F. von Weizsäcker. Im März 1964 Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes. Im Herbst 1965 Abschluß des Studiums mit dem Staatsexamen für die Fächerkombination Mathematik, Physik, Philosophie. Im Herbst 1965 Doktorand bei Herrn Prof. H. Bauer an der Universität Erlangen.

Offsetdruck - Fotodruck

Josef Hogl

8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz.) Tel. 22990

Offsetdruck - Fotodruck

- J. H o g l, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Telefon 22990 -